गणित पाठमाला-1

2-दूरीक एवं 2-मानकित समष्टियों में संपात एवं स्थिर बिंदु समीकरणों के साधन

लेखक
श्याम लाल सिंह
तथा
देवेंद्र दत्त शर्मा

सत्यमेव जयते

वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आयोग
मानव संसाधन विकास मंत्रालय, (शिक्षा विभाग),
भारत सरकार

गणित पाठमाला-1

2-दूरीक एवं 2-मानकित समष्टियों में संपात एवं स्थिर बिंदु समीकरणों के साधन

(Solutions of coincidence and fixed point equations on 2-metric and 2-normed spaces)

श्याम लाल सिंह
देवेंद्र दत्त शर्मा
गणित विभाग, गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय
हरिद्वार

सत्यमेव जयते

वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आयोग
मानव संसाधन विकास मंत्रालय
भारत-सरकार
1999

प्रकाशक :
वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आयोग
पश्चिमी खंड-7, रामकृष्णपुरम्,
नई दिल्ली - 110066

मूल्य **देश में : 68.00 रुपये**
विदेश में : एक पौण्ड या 1.46 डॉलर

मुद्रक :
महाप्रबंधक,
भारत सरकार मुद्रणालय

बिक्री हेतु संपर्क :
1. सहायक निदेशक (बिक्री)
वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आयोग
पश्चिमी खंड - 7, रामकृष्णपुरम्
नई दिल्ली - 110066

2. प्रकाशन नियंत्रक
प्रकाशन विभाग, भारत सरकार
सिविल लाइन्स
दिल्ली - 110054

प्रस्तावना

भारत सरकार ने विश्वविद्यालय स्तर पर शिक्षा-माध्यम के रूप में हिंदी तथा अन्य भारतीय भाषाओं के विकास के लिए तत्कालीन शिक्षा मंत्रालय (अब मानव संसाधन विकास मंत्रालय) के अधीन सन् 1961 में वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आयोग की स्थापना की। इस लक्ष्य की प्राप्ति के लिए आयोग ने विभिन्न विषयों की तकनीकी शब्दावली तथा अखिल भारतीय शब्दावली के निर्माण के साथ-साथ अनेक परिभाषा-कोशों, चयनिकाओं, पाठमालाओं तथा विश्वविद्यालय स्तरीय हिंदी पुस्तकों का निर्माण किया है। अनेक पाठ्य-पुस्तकें, शब्द-संग्रह, परिभाषा-कोश, पाठमालाएं, चयनिकाएं आदि प्रकाशित हो चुकी हैं।

पाठमालाओं के निर्माण में इस बात का पूरा ध्यान रखा गया है कि उनकी विषय-सामग्री उपयोगी तथा अद्यतन हो तथा भाषा सरल, बोधगम्य और आकर्षक हो ताकि अध्यापक भी हिंदी माध्यम से विभिन्न विषयों को पढ़ाने में सक्षम हो सकें।

प्रस्तुत कृति आयोग की गणित पाठमाला के अंतर्गत प्रकाशित की जा रही है। इसमें 2-दूरीक एवं 2-मानकित समष्टियों पर विभिन्न प्रतिचित्रण प्रतिबंधों के अधीन स्थिर बिंदु प्रमेय प्राप्त किए गए हैं।

इस पाठमाला के लेखक प्रो. श्यामलाल सिंह एवं प्रो. देवेंद्र दत्त शर्मा गणित के प्रतिष्ठित विद्वान हैं। विद्वान लेखक-द्वय ने इस उच्चस्तरीय विषय को हिंदी में परिश्रम पूर्वक प्रस्तुत किया है। विषय के सम्यक् प्रतिपादन के लिए उपयुक्त परिभाषाएं दी गई हैं, उनके उदाहरण दिए गए हैं और परिणाम प्रस्तुत किए गए हैं। अनेक प्रमेयों एवं उपपत्तियों द्वारा परिणामों की सहज परिणति की गई है।

इस पाठमाला में हिंदी की मानक तकनीकी शब्दावली का प्रयोग किया गया है तथा भारत सरकार द्वारा प्रस्तुत मानक-वर्तनी का प्रयोग किया गया है। पुस्तक के अंत में तकनीकी शब्दों की हिंदी-अंग्रेजी तथा अंग्रेजी-हिंदी सूचियाँ भी दे दी गई हैं।

पुस्तक के भाषा-संपादन में आयोग के पूर्व सचिव श्री देवेंद्र दत्त नौटियाल ने भी सहयोग दिया है। मैं उनका आभारी हूं।

मुझे विश्वास है कि गणित पाठमाला की यह पुस्तक गणित के सभी पाठकों के लिए उपयोगी सिद्ध होगी।

(डॉ० राय अवधेश कुमार श्रीवास्तव)
अध्यक्ष
वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आयोग

नई दिल्ली
10 जनवरी, 1999

वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आयोग

डॉ० राय अवधेश कुमार श्रीवास्तव, अध्यक्ष

सदस्य

1. डॉ० अनूप् चोपड़ा
प्रोफेसर, ई.एन.टी.,
लोकनायक जयप्रकाश नारायण अस्पताल,
नई दिल्ली

2. प्रो० कीर्ति सिंह
सदस्य,
कृषि वैज्ञानिक चयन बोर्ड, पूसा,
नई दिल्ली

3. प्रो० बी०डी० नौटियाल
सिविल इंजीनियरी विभाग,
बनारस हिंदू विश्वविद्यालय,
वाराणसी

4. श्री डी०बी० डिमरी
महानिदेशक, भारतीय भूवैज्ञानिक सर्वेक्षण,
कलकत्ता

5. प्रो० प्रेम सिंह
भाषा विज्ञान विभाग,
दिल्ली विश्वविद्यालय,
दिल्ली

6. प्रो० लक्ष्मण सिंह कोठारी
पूर्व अध्यक्ष, भौतिकी विभाग
दिल्ली विश्वविद्यालय,
दिल्ली

परामर्शदाता
डॉ० नगेंद्र

पाठमाला पुनरीक्षण एवं संपादन

प्रधान संपादक
डॉ० राय अवधेश कुमार श्रीवास्तव, अध्यक्ष

संपादक
श्री दुर्गा प्रसाद मिश्र

पुनरीक्षक
प्रो० वागीश शुक्ल

प्रकाशन एकक
श्री एस०पी० अरोड़ा
सहायक निदेशक

डॉ० पी०एन० शुक्ल
सहायक शिक्षा अधिकारी

कलाकार
श्री आलोक वाही

भूमिका

इस पुस्तक में 2-दूरीक एवं 2-मानकित समष्टियों पर विभिन्न प्रतिचित्रण शर्तों एवं समष्टीय प्रतिबंधों के अधीन स्थिर बिंदु प्रमेय प्राप्त किए गए हैं। विभिन्न परिभाषाएं, उदाहरण एवं परिणाम निम्नलिखित पाँच अध्यायों में अनुस्यूत हैं।

1. प्रारंभिकी
2. 2-दूरीक समष्टि में संकुचनीय प्रतिचित्रणों के स्थिर बिंदु
3. मतकोवस्की संकुचन सिद्धांत
4. 2-बानाख़ समष्टि में स्थिर बिंदु प्रमेय
5. अविस्तारी प्रतिचित्रणों के पुनरावृत्तिकों का अभिसरण

प्रथम अध्याय की प्रकृति परिचयात्मक है। इसमें जर्मन गणितज्ञ एस० गैहलर द्वारा अन्वेषित 2-दूरीक, 2-मानकित एवं 2-बानाख़ समष्टियों का संक्षिप्त विवरण प्रस्तुत करने के साथ सुज्ञात बानाख़ संकुचन सिद्धांत के कुछ प्रमुख व्यापकीकरणों का भी उल्लेख किया गया है। द्वितीय अध्याय में चुंग [27], पाचपट्टे [130], रोअडेस [152], पाठक [136]-[137] द्वारा स्थापित किए गए स्थिर बिंदु प्रमेयों के प्रतिचित्रण प्रतिबंधों का अध्ययन किया गया है तथा इनमें से कुछ परिणामों को विस्तारित करते हुए कुछ स्थिर बिंदु प्रमेय स्थापित किए गए हैं। इससे बानाख़ संकुचन सिद्धांत के कुछ अन्य व्यापकीकरण प्राप्त होते हैं। परिभाषाओं आदि को स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण भी यथास्थान सम्मिलित किए गए हैं।

1973 में प्रोफेसर जे० मतकोवस्की [114] ने गुण समष्टियों पर बानाख़ संकुचन सिद्धांत का एक महत्वपूर्ण व्यापकीकरण प्रस्तुत किया जो संप्रति अनुप्रयोज्य विश्लेषण के लिए महत्वपूर्ण हो रहा है। तृतीय अध्याय में मतकोवस्की के इस संकुचन सिद्धांत

का 2-दूरीक समष्टि में एक अध्ययन प्रस्तुत किया गया है। इस अध्याय में प्राप्त परिणाम गोबेल [78], युंक [87], सिंह-कुलश्रेष्ठ [176], आईमेकी-शर्मा [78], [82] संपात एवं स्थिर बिंदु प्रमेयों के विस्तारण एवं एकीकरण हैं। चतुर्थ अध्याय में 2-बानाख़ समष्टि पर एक नई संकुचन शर्त के अधीन स्थिर बिंदु प्रमेय प्राप्त किए गए हैं। यह सुज्ञात है कि अविस्तारी प्रतिचित्रणों में पुनरावृत्तिकों का किसी स्थिर बिंदु पर अभिसरित होना आवश्यक नहीं है। पंचम अध्याय का उद्देश्य कुछ ऐसा-प्रतिचित्रण प्रतिबंधों का अध्ययन करना है, जिनके अधीन 2-मानकित समष्टि पर परिभाषित प्रतिचित्रणों के पुनरावृत्तिकों का अनुक्रम प्रतिचित्रणों के स्थिर बिंदु पर अभिसरित हो सके। वस्तुतः 2-मानकित समष्टि पर पुनरावृत्तिकों के अभिसरण से संबंधित समस्याओं के अध्ययन का यह प्रथम प्रयास है।

श्याम लाल सिंह
एवं
देवेंद्र दत्त शर्मा

विषय-सूची

प्रथम अध्याय

प्रारंभिकी

इस परिचयात्मक अध्याय में जर्मन गणितज्ञ एस. गैहलर द्वारा अन्वेषित 2-दूरीक, 2-मानकित एवं 2-बानाख़ समष्टियों का संक्षिप्त विवरण दिया गया है। दूसरे एवं तीसरे अनुभागों में बानाख़ संकुचन सिद्धांत एवं युंक संकुचन सिद्धांत और इनके प्रमुख व्यापकीकरणों का उल्लेख किया गया है। चतुर्थ व पंचम अनुभागों में 2-दूरीक समष्टि के कतिपय परिवर्तो एवं उन पर अन्वेषित स्थिर बिंदु प्रमेयों के संक्षिप्त संकेत तथा हसियाओ [76] के आलेख पर महत्त्वपूर्ण टिप्पणी अनुस्यूत हैं। वस्तुतः यह अध्याय निम्नलिखित पाँच अनुभागों में विभक्त है :

1. 2-दूरीक, 2-मानकित एवं 2-बानाख़ समष्टियां
2. बानाख़ संकुचन सिद्धांत एवं इसके कुछ व्यापकीकरण
3. युंक संकुचन सिद्धांत
4. 2-दूरीक के नये कदम
5. हसियाओ के आलेख पर टिप्पणी

1. 2-दूरीक, 2-मानकित एवं 2-बानाख़ समष्टियां

ऐसा प्रतीत होता है कि सन् 1928 में प्रकाशित प्रोफेसर के. मेंगर के एक शोध प्रपत्र [116] से प्रेरणा प्राप्त कर जर्मन गणितज्ञ प्रोफेसर एस० गैहलर [58]-[61] ने दूरीक एवं मानकित समष्टियों के द्विविमीय सादृश प्रस्तुत किए जिन्हें क्रमशः 2-दूरीक एवं 2-मानकित समष्टियों के नाम से जाना जाता है। यूक्लिड समष्टि में तीन बिंदुओं द्वारा निर्धारित त्रिभुज के क्षेत्रफल के गुणधर्मों की शुद्ध गणितीय व्याख्या करने वाली इन समष्टियों पर हुए विस्तृत अनुसंधान कार्य के लिए ([4], [13], [21]-[23], [30], [34]-[39], [55]-[56], [69], [76], [78], [79], [81]-[83], [98], [127], [140], [170] व [201]) का अवलोकन करें।

एक अरिक्त समुच्चय X के लिए $X \times X \times X$ पर वास्तविक फलन d को 2-दूरीक कहते हैं यदि d निम्नलिखित शर्तें संतुष्ट करता हो :

(द-1) दो भिन्न बिंदुओं x, y के लिए X में तीसरे बिंदु z का इस प्रकार अस्तित्व हो कि $d(x, y, z) \neq 0$;

(द-2) यदि तीन बिंदुओं x, y, z में से कम से कम दो समान हों तो $d(x, y, z) = 0$;

(द-3) $d(x, y, z) = d(y, z, x) = d(z, x, y)$; (तीनों चरों में सममिति);

(द-4) $d(x, y, z) \leq d(x, y, w) + d(x, w, z) + d(w, y, z)$ (त्रिभुजीय असमिका);

युग्म (X, d) को 2-दूरीक समष्टि कहा जाता है। (द-2) और (द-4) से स्पष्ट है कि d एक ऋणेतर फलन है।

सर्वप्रथम 2-दूरीक से संबंधित कुछ उदाहरण दिए जा रहे हैं :

उदाहरण-1.1 [58]. यदि x_j, y_j, z_j क्रमशः x, y, z के निर्देशांक हों तो दो या अधिक विमाओं की प्रत्येक यूक्लिडीय दूरीक समष्टि पर निम्न 2-दूरीक परिभाषित होती हैं :

$$d(x, y, z) = (1/2)\left[\sum_{i<j} \begin{vmatrix} x_i & x_j & 1 \\ y_i & y_j & 1 \\ z_i & z_j & 1 \end{vmatrix}^2\right]^{1/2}$$

इस प्रकार परिभाषित 2-दूरीक को यूक्लिडीय 2-दूरीक कहा जाता है।

उदाहरण-1.2 [120]. मान लें $X = \{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots\ldots\}$

तथा $d : X \times X \times X \to [0, \infty)$ निम्न प्रकार परिभाषित करें :

$$d(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } x, y, z \text{ भिन्न हों तथा किसी धन पूर्णांक } n \text{ के लिए } \{1/n, 1/(n+1)\} \subset \{x, y, z\} \text{ है,} \\ 0 & \text{अन्यथा.} \end{cases}$$

तब (X, d) एक 2-दूरीक समष्टि है।

उदाहरण 1.3 [120]. मान लें

$X = \{a\} \cup \{a_n : n = 1, 2, \ldots\ldots\} \cup \{b\} \cup \{b_n : n = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots\}$

जहां $a = (1, 0)$, $b = (0, 0)$, $a_n = (1+1/n, 0)$

तथा $b_n = (0, 1/n)$, $n = 1, 2, \ldots\ldots\ldots$

$d : X \times X \times X \to [0, \infty)$

निम्न प्रकार लें

$$d(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{यदि किसी धन पूर्णांक } n \text{ के लिए } \{x, y, z\} = \{a_n, b_n, a\} \text{ या } \{a_n, b_n, b\} \\ & \text{या विभिन्न धन पूर्णांकों } m, n \text{ के लिए } \{x, y, z\} = \{a_n, b_n, a_m\} \text{ या } \{a_n, a_n, b_m\} \\ A(x, y, z) & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

जहां A(x, y, z) बिंदुओं x, y और z से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल है.

तब (X, d) एक 2-दूरीक समष्टि है।

इस अध्याय में हम 2-दूरीक एवं दूरीक (1-दूरीक) समष्टियों को क्रमशः (X, d) एवं (M, d) द्वारा प्रदर्शित करेंगे।

गैहलर [58] ने सिद्ध किया है कि यद्यपि 2-दूरीक d तीनों चरों (अर्थात् तीनों निर्देशांकों) में किसी एक निर्देशांक के सापेक्ष संतत है किन्तु यह आवश्यक नहीं कि यह दो निर्देशांकों के सापेक्ष भी संतत हो। यदि यह दो निर्देशांकों के सापेक्ष संतत हो तो यह तीनों निर्देशांकों के सापेक्ष भी संतत होगा। 2-दूरीक फलन द्विसंतत कहा जायेगा यदि यह सभी निर्देशांकों के सापेक्ष संतत हो।

2-दूरीक समष्टि X का एक अनुक्रम (x_n) 2-कोशी अनुक्रम (सामान्यतया, यदि भ्रम की गुंजाइश न हो, कोशी अनुक्रम) कहा जाता है यदि X के प्रत्येक बिंदु a के लिए

सीमा $_{m,\, n}\ d(x_m, x_n, a) = 0$

समष्टि X के बिंदु x पर अनुक्रम $\{x_n\}$ अभिसरित होता है और x को इस अनुक्रम की सीमा कहते हैं यदि X के प्रत्येक a के लिए

सीमा $_n\ d(x_n, x, a) = 0$

(X, d) को पूर्ण 2-दूरीक समष्टि कहा जाता है यदि इसमें प्रत्येक कोशी अनुक्रम एक अभसारी अनुक्रम हो।

उल्लेख्य है कि किसी पूर्ण 2-दूरीक समष्टि में अभिसरित होने वाले प्रत्येक अनुक्रम का कोशी होना आवश्यक नहीं है (देखें उदाहरण 2); इसमें (X, d) एक पूर्ण 2-दूरीक समष्टि है तथा अनुक्रम {1/n} शून्य पर अभिसरित होता है परंतु {1/n} कोशी अनुक्रम नहीं है। एक अन्य उदाहरण (देखें, उदाहरण 3) में नायडू-प्रसाद [120] ने यह दिखाया कि यदि 2-दूरीक d समुच्चय X पर संतत हो तो समष्टि X में अभिसरित होने वाला प्रत्येक अनुक्रम कोशी होता है परंतु इसका विलोम सत्य नहीं है।

मान लें L एक से अधिक विमावाली रैखिक समष्टि है तथा L×L पर निम्न शर्तों के साथ ||., .|| एक वास्तविक फलन है :

(म-1) || a, b || = 0, यदि और केवल यदि a एवं b रैखिकतः आश्रित हैं;

(म-2) || a, b || = || b, a ||;

(म-3) || pa, b || = |p| || a, b ||, जहां p वास्तविक संख्या है;

(म-4) || a+b, c) = || a, b || + || b, c ||;.

तब ||., .|| को L पर 2-मानकित एवं युग्म (L, ||., ||) को 2-मानकित समष्टि कहा

जाता है। स्पष्ट है कि ||., .|| एक ऋणेतर फलन है तथा किसी वास्तविक संख्या p एवं L के प्रत्येक x, y के लिए $\| x, y + px \| = \| x, y \|$

इस खंड में जब तक अन्यथा न कहा जाए, L द्वारा 2-मानकित समष्टि को प्रदर्शित करेंगे।

2-मानकित समष्टि L का एक अनुक्रम $\{x_n\}$ कोशी अनुक्रम कहा जाता है यदि L में रैखिकतः स्वतंत्र अवयव y व z ऐसे हों कि

सीमा $_{m,n} \| x_m - x_n, y \| = 0$

और

सीमा $_{m,n} \| x_m - x_n, z \| = 0$

2-मानकित समष्टि L में एक अनुक्रम $\{x_n\}$ को अभिसारी कहा जायेगा यदि L के प्रत्येक अवयव y के लिए L में एक अवयव x का ऐसा अस्तित्व हो कि

सीमा $_{n} \| x_n - x, y \| = 0$

यदि अनुक्रम $\{x_n\}$ समष्टि L के किसी बिंदु x पर अभिसरित होता हो तो x को इस अनुक्रम की सीमा कहा जाता है। 2-मानकित समष्टि L को 2-बानाख़ समष्टि कहा जाता है यदि इसमें प्रत्येक कोशी अनुक्रम एक अभिसारी अनुक्रम हो।

उदाहरण 1.4 [201]. मान लें E_3 द्वारा त्रिविमीय सदिश समष्टि को प्रदर्शित किया जाता है। मान लें

$x = (a, b, c), y = (d, e, f)$

तथा

$\| x, y \| = | x \times y |.$

तब $(E_3, \|., .\|)$ 2-बानाख़ समष्टि है।

यदि $(L, \|., .\|)$ एक 2-मानकित समष्टि हो तब समष्टि L पर $d(x, y, z) = \| x-z, y-z \|$ लेकर एक 2-दूरीक परिभाषित किया जा सकता है। इस प्रकार प्रत्येक 2-मानकित समष्टि 2-दूरीक समष्टि भी है परन्तु इसका विलोम सदैव सत्य नहीं है। हाल ही में चो-फ्रीजे [23] ने उन परिस्थितियों का अध्ययन किया जिनके अंतर्गत एक 2-दूरीक समष्टि 2-मानकित समष्टि हो सकती है। 2-मानकित एवं 2-बानाख़ समष्टियों पर सविस्तार अध्ययन के लिए ([21], [23], [34]-[39], [59], [61], [98], [201], [208]-[213], [215], [218], [220]-[221], [223], [227], [230], [232], [233], [238]-[241]) का अवलोकन करें।

2. बानाख़ संकुचन सिद्धांत एवं इसके कुछ व्यापकीकरण

स्थिर बिंदु सिद्धांत गणितीय विज्ञान की एक आकर्षक विधा है जो अनुप्रयोगों की दृष्टि से अवकल-समाकल समीकरणों, गतिकीय तंत्रों, सांस्थितिकी, फलनक विश्लेषण, इष्टतम संचालन, विचरण सिद्धांत, क्रीड़ा सिद्धांत, सन्निकटन सिद्धांत, अभिकलित्र अभिलेखन, अभियांत्रिकी एवं अर्थशास्त्र के क्षेत्र में महत्वपूर्ण भूमिका निभा रही है, शनैः शनैः स्थिर बिंदु अस्तित्व एवं इसको प्राप्त करने की नई विधियों के अन्वेषित एवं परिष्कृत होने से यह सिद्धांत प्रायोगिक गणित में विभिन्न प्रकार के समीकरणों के सफल साधन हेतु प्रमुख भूमिका निभाने लगा है। पिछले करीब तीन दशकों में विभिन्न विन्यासों यथा, बीजीय सांस्थितिकी, दूरीक, 2-दूरीक, बानाख़, हिल्बर्ट, प्रायिकतात्मक, यादृच्छिक एवं मानकित समष्टियों में स्थिर बिंदुओं की प्राप्ति हेतु किए गए शोध कार्य से बृहत् साहित्य सामने आया है। स्थिर बिंदु प्रमेयों के अनुप्रयोगों को देखते हुए प्रमेयों के व्यापक रूपों के प्रति गणितज्ञों की जिज्ञासा निरंतर बनी हुई है।

1910 में एल0 ब्रावर द्वारा यह स्थापित किया गया कि ऐकक गोले पर परिभाषित संतत स्व-प्रतिचित्रणों का एक स्थिर बिंदु होता है। ब्रावर स्थिर बिंदु प्रमेय से संबंधित कतिपय ऐतिहासिक तथ्य तथा इसके व्यापकीकरण एवं अनुप्रयोगों पर सविस्तार अध्ययन हेतु चैंग-चो-कांग [209], सिंह-शर्मा [237] एवं सिंह-वाटसन श्रीवास्तव [233] का अवलोकन किया जा सकता है। कुछ समय बाद 1922 में स्टेफन बानाख़ ने एक अन्य स्थिर बिंदु प्रमेय प्रतिपादित किया, जो अनुप्रयुक्त गणित के लिए एक महत्वपूर्ण उपकरण सिद्ध हुआ। प्रस्तुत पुस्तक में हमारा उद्देश्य इस स्थिर बिंदु प्रमेय के कुछ अन्य व्यापकीकरण प्रस्तुत करना है। स्थिर बिंदु सिद्धांत पर रचित उपयोगी पुस्तकों के लिए ([12], [43], [67], [71]-[72], [85]-[86].) का अवलोकन करें। बानाख़ की एक अच्छी जीवनी हेतु कलूजा [219] का कार्य अवलोकनीय है।

बानाख़ संकुचन सिद्धांत

यदि दूरीक समष्टि (M, d) पर एक प्रतिचित्रण T के लिए एक ऋणेतर नियतांक $k < 1$ का इस प्रकार अस्तित्व हो कि M के प्रत्येक x, y के लिए

$d(Tx, Ty) \le kd(x, y)$

तो T को समष्टि M पर संकुचन प्रतिचित्रण कहा जाता है। यदि $k = 1$ हो तब T को समष्टि M पर अविस्तारी प्रतिचित्रण कहा जाता है। स्पष्ट है कि अविस्तारी प्रतिचित्रण संकुचन

प्रतिचित्रणों से अधिक व्यापक हैं। अविस्तारी प्रतिचित्रणों के स्थिर बिंदु के अस्तित्व एवं सन्निकटन हेतु अल्सूफाख़ [3], एंडरसन-ग्वे-सिंह [5], आसाद-कर्क [6], बैयों-ब्रुक-रीच [8], बेलूस-कर्क स्टाइनर [11], ब्राउडर [15], गोबेल-कर्क-शीमी [65], आईसेकी [79], ग्वे-सिंह-व्हिटफिलुड [70], कर्क [101], नेम्पली-सिंह-व्हिटफिलुड [123], रोअडेस [151] व सिंह [172] के कार्य विशेष रूप से उल्लेखनीय हैं, (आचारी-लहरी [1], वै [7], कोर्बोन-मारिनो [16], डिमनी-वाईट [38]-[39], फाईगूरिडो [46], गोबेल-कुज्यूमोव [66], गोबेल-रीच [67], गोहडे [68], हाउस्डोर्फ [74], लहरी-तिवारी [106], लाल-सिंह [109], लिम [110], मार्किन [111], मासो-रोक्स [113], नाडलर [119], सामंता [157], सिंह [164], सिंह [195], थीप-वीट [197], वांग [202] व जेई [204] को भी देखें), जैसा कि सुज्ञात है *पूर्ण दूरीक समष्टि पर संकुचन प्रतिचित्रण एक अद्वितीय साधन रखता है अर्थात् M में एक ऐसे अद्वितीय बिंदु z का अस्तित्व होता है कि* $Tz = z$.

यह सिद्धांत बानाख़ संकुचन सिद्धांत (*बासंसि*) के नाम से जाना जाता है। विभिन्न समष्टियों में बासंसि एवं व्यापकीकरण व विस्तारण का हाल ही में पर्याप्त अध्ययन हुआ है (देखें [1]-[3], [5]-[12], [14]-[22], [24]-[29], [31]-[33], [38]-[54], [57], [62], [68], [70]-[73], [75]-[97], [99]-[115], [117]-[126], [128]-[163], [165]-[196], [198]-[200], [202]-[204]-[211], [214]-[217], [221]-[231], [233]-[241]).

ऐसा प्रतीत होता है कि के0 आईसेकी-बी0के0 शर्मा-पी0एल0 शर्मा [82] द्वारा 2-दूरीक समष्टि पर संकुचन प्रतिचित्रण (यदि 2-दूरीक समष्टि (X, d) पर स्व-प्रतिचित्रण T के लिए $k \in (0, 1)$ का ऐसा अस्तित्व हो कि X के प्रत्येक x, y, a के लिए $d(Tx, Ty, a) \leq kd(x, y, a)$) परिभाषित करते हुए यह सिद्ध किया गया कि पूर्ण 2-दूरीक समष्टि पर परिभाषित प्रत्येक संकुचन प्रतिचित्रण का एक अद्वितीय स्थिर बिंदु होता है।

उनके इस प्रारंभिक कार्य से 2-दूरीक एवं 2-मानकित समष्टियों में स्थिर बिंदुओं के अस्तित्व के अध्ययन का समारंभ हुआ ([78]-[79], [81]-[82], [160] भी देखें)। उल्लेख्य है कि इन गणितज्ञों ने 2-दूरीक समष्टि पर परिबद्धता की शर्त का प्रयोग करते हुए स्थिर बिंदु का अन्वेषण किया। ऐसा प्रतीत होता है कि संकुचन प्रकार प्रतिचित्रणों के लिए इस शर्त से मुक्त परिणाम सर्वप्रथम रोअडेस [150] एवं लाल-सिंह [108] ने स्थापित किए। स्थिर बिंदु सिद्धांत में समष्टि के अवयवों द्वारा रचित अनुक्रम का कोशी होना या न होना महत्वपूर्ण भूमिका अदा करता है। इस परीक्षण के लिए सिंह [168] ने 1979 में रोअडेस [150] से प्रेरणा लेकर निम्नलिखित प्रमेयिका स्थापित की जिसने 2-दूरीक समष्टि पर स्थिर बिंदुओं के अन्वेषण को अत्यंत सुगम बना दिया :

प्रमेयिका 2.1 [168]. मान लें पूर्ण 2-दूरीक समष्टि X में $\{y_n\}$ एक अनुक्रम है। तब अनुक्रम $\{y_n\}$ समष्टि X के किसी बिंदु पर अभिसरित होगा यदि प्रत्येक n और X के प्रत्येक a के लिए $h \in (0, 1)$ का ऐसा अस्तित्व हो कि

$$d(y_n, y_{n+1}, a) \leq hd(y_{n-1}, y_n, a)$$

यहां पर हाल ही में प्रकाशित सिंह-गांगुली-कुमार [179] की निम्नलिखित प्रमेय का उल्लेख करना समीचीन होगा। प्रमेय में प्रयुक्त संकेत निम्नलिखित अर्थों में हैं :

X न्यूनतम तीन बिंदुओं वाले स्वेच्छ समुच्चय के लिए प्रयुक्त है। N का प्रयोग प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय के रूप में, (Y, d) का 2-दूरीक समष्टि के रूप में एवं $H = \{h : [0, \infty) \to [0, \infty)$: उपरि सामिसंतत अह्रासमान है एवं $h(t) < t, t > 0\}$. यदि S तथा P समष्टि Y पर प्रतिचित्रण हैं तब $\subset(SP)$ को S तथा P के समस्त संपाती बिंदुओं के समुच्चय के रूप में प्रयुक्त किया जायेगा, अर्थात् $\subset(SP) = \{z : Sz = Pz\}$.

प्रमेय 2.2. मान लें X एक स्वेच्छ समुच्चय है, Y एक 2-दूरीक समष्टि और $A_i (i \in N) : X \to Y$ है. यदि प्रतिचित्रण $S, T : X \to Y$ इस प्रकार हैं कि $A_i(X) \subset S(X) \cap T(X)$, $i \in N$ तथा समस्त $x, y \in X$, $a \in y$, $i, j \in N$ $i \neq j$ के लिए तथा H के किसी h के लिए

(2.2.1) $d(A_i x, A_j y, a)$

$\leq h$ (अधिकतम $\{d(Sx, Ty, a), d(Sx, A_i x, a),$

$d(Ty, A_j y, a), 1/2[d(Sx, A_j y, a)$

$+ d(Ty, A_i x, a)]\})$,

तथा $S(X) \cap T(X)$ समष्टि Y की पूर्ण उपसमष्टि है तब प्रत्येक $i \in N$ के लिए

(2.2.2) A_i और S_i में संपात है;

(2.2.3) A_i और T_i में संपात है;

तथा यदि $X = Y$ और प्रत्येक A_i, S (क्रमशः T) के साथ $C(A_i S)$ (क्रमशः $C(A_i T)$) पर क्रमविनिमेयी होता है, तब $A_i (i \in N)$, S और T का अद्वितीय स्थिर बिंदु होगा।

ऐसा प्रतीत होता है कि सिंह-गागुंली-कुमार [179] की उक्त प्रमेय 2-दूरीक समष्टि पर संकुचनीय प्रकार के प्रतिचित्रणों हेतु अभी तक ज्ञात अनेकों परिणामों से व्यापक है। इससे कई परिणाम उपप्रमेय के रूप में प्राप्त किए जा सकते हैं। उदाहरणार्थ [73], [97], [102], [120], [150], [169] व [182] के परिणाम उपप्रमेय के रूप में प्राप्त किए जा सकते हैं।

टिप्पणी. प्रमेय 2.2 में "$S(X) \cap T(X)$ समष्टि Y की पूर्ण उपसमष्टि है" के स्थान पर "$A_i(X)$ समष्टि Y की पूर्ण उपसमष्टि है" लिये जाने पर प्रमेय का एक अन्य सत्य परिवर्त प्राप्त होता है।

प्रमेय 2.2 के विभिन्न परिवर्तों एवं कतिपय अनुप्रयोगों हेतु सिंह-कुमार-गांगुली का प्रपत्र [179] विशेषतः उल्लेखनीय है। यह भी उल्लेखनीय है कि प्रमेय 2.2 में d संतत नहीं लिया गया है.

3. युंक संकुचन सिद्धांत

युंक प्रमेय. यदि दूरीक समष्टि (M, d) पर स्व-प्रतिचित्रणों f व g के लिए एक धनात्मक नियतांक $k < 1$ का इस प्रकार अस्तित्व हो कि

(ज-1) $f(M) \subset g(M)$;

(ज-2) $d(fx, fy) \leq kd(gx, gy),\ x, y \in M$;

(ज-3) प्रतिचित्रण g संतत हो;

(ज-4) प्रतिचित्रण f और g क्रमविनिमेयी हों;

तब पूर्ण दूरीक समष्टि M में प्रतिचित्रण f एवं g अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु रखते हैं।

यह परिणाम युंक [87] द्वारा 1976 में प्रतिपादित किया गया।

{**विशेष टिप्पणी :** यद्यपि प्रतिबंधों (ज-1)-(ज-2) के अधीन दो प्रतिचित्रणों के संपात बिंदु का अध्ययन गोबेल [64} ने युंक के परिणाम प्रकाशित होने से पूर्व कर लिया था तथापि ऐसा प्रतीत होता है कि युंक के उक्त परिणाम का आधार गोबेल [64] का संपात प्रमेय नहीं है। वस्तुतः गोबेल ने *बांससि* का प्रयोग करते हुए यह सिद्ध किया है कि *यदि पूर्ण दूरीक समष्टि पर स्व-प्रतिचित्रण* (ज-1)-(ज-2) *को संतुष्ट करें तो प्रतिचित्रणों* f *और* g *का* M *के कम से कम एक बिंदु पर संपात होता है अर्थात्* M *में कम से कम एक ऐसे बिंदु* z *का अस्तित्व होता है कि* $fz = gz$। वर्ष 1983 में एक वार्ता के दौरान प्रथम लेखक एस0एल0 सिंह ने थंडर बे (कनाडा) में प्रो0 जी0 युंक से यह पूछा कि क्या आप 1968 में प्रकाशित गोबेल संपात प्रमेय से परिचित हैं? इस प्रश्न का प्रो0 युंक ने तब नकारात्मक उत्तर दिया था।}

युंक के उक्त परिणाम ने संकुचनीय सिद्धांत में एक नई दिशा को जन्म दिया। वस्तुतः युंक का उक्त परिणाम सर्वप्रथम सिंह [163] द्वारा व्यापकीकृत हुआ। तत्पश्चात् अनेकों गणितज्ञों ने युंक प्रकार के संकुचन सिद्धांतों का प्रतिपादन किया। उदाहरणार्थ देखें ([18]-[19], [24], [29], [33], [40]-[41], [47], [50]-[52], [54], [57], [73], [88]-[91], [93]-[97], [102], [104]-[105], [112], [117]-[118], [120], [124]-[125], [128], [132]-[134], [137]-[138], [140], [152]-[156], [163], [165]-[171], [173]-[175], [177]-[194], [196], [200], [205], [214], [217], [235]).

युंक प्रकार के संकुचन सिद्धांत में प्रतिचित्रणों की क्रमविनिमेयता (ऊपर (ज-4) देखें) को शिथिल करने के कुछ सफल प्रयास किए गए। इतालवी गणितज्ञ सेसा [156] ने दुर्बल क्रमविनिमेयता, युंक [88] ने सुसंगता, सिंह-तिवारी [189] ने उपगामी क्रमविनिमेयता व पाठक [137] ने दुर्बल* क्रमविनिमेयता से क्रमविनिमेयता को प्रतिस्थापित करते हुए व्यापक परिणाम प्राप्त किए। (क्रमविनिमेयता के दुर्बल स्वरूपों की परिभाषाओं एवं इनके आपसी संबंधों पर उदाहरणों हेतु आगामी खंड का प्रथम अनुभाग देखें।) युंक [87] के उक्त परिणाम के निम्नलिखित परिवर्त युंक संकुचन सिद्धांत *(युसंसि)* के नाम से जाने जाते हैं। (उदाहरणार्थ देखें, [189], [192])

ऐसा प्रतीत होता है कि युंक [87] की प्रमेय का 2-दूरीक समष्टि में सर्वप्रथम विस्तारण 1977-78 में श्याम लाल सिंह द्वारा किया गया (देखें [166] व [190])। इस सिद्धांत का 2-दूरीक सादृश्य प्रमेय 2.2 में अंतर्निहित है। इसके बाद *युसंसि* का व्यापकीकरण, विस्तारण व अनुप्रयोग विभिन्न समष्टियों एवं विन्यासों में किया गया (उदाहरणार्थ देखें, [18], [25], [54], [57], [94], [95], [97], [102], [105], [117]-[118], [120], [140], [165]-[171], [173], [181]-[194], [199])।

दूरीक समष्टि पर युसंसि [235]. मान लें X एक स्वेच्छ समुच्चय है, M एक दूरीक (1-दूरीक) समष्टि है, और प्रतिचित्रणों 2, $f : X \to M$ के लिए एक धनात्मक नियतांक $k < 1$ का अस्तित्व इस प्रकार हो कि–

(स-1) $f(x) \subset g(X)$;

(स-2) $f(x)$ या $g(x)$ समष्टि Y का एक पूर्ण उपसमष्टि हो;

(स-3) $d(fx, fy) \leq k\, d(gx, gy),\ x, y \in X$.

तब g व f में संपात है, अर्थात् X में एक ऐसे बिंदु z का अस्तित्व प्राप्त होता है कि $fz = gz$. वास्तव में, X के प्रत्येक x_o हेतु, X में एक ऐसे अनुक्रम $\{x_n\}$ का अस्तित्व होता है कि–

(i) $gx_{n+1} = fx_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

(ii) समुच्चय X में एक ऐसा बिंदु z होता है जिसके लिए अनुक्रम $\{fx_n\}$ बिंदु z पर अभिसरित होता है तथा $fz = gz$;

(iii) $d(gx_n, gz) \le k^n d(fx_0, fz)$.

भूयः, यदि M = X तथा f व g (मात्र) z पर क्रमविनिमेयी हों तो f व g अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु रखते हैं। (वस्तुतः $ggz = gz = fz = ffz$).

टिप्पणी. (किसी समष्टि M पर दो स्व-प्रतिचित्रणों के किसी एक संपात बिंदु z पर क्रमविनिमेयता तथा इसके विभिन्न दुर्बल स्वरूपों की z पर क्रमविनिमेयता (यथा सुसंगतता, दुर्बल/R-दुर्बल क्रमविनिमेयता) समकक्ष होती हैं।

2-दूरीक समष्टि पर युसंसि. मान लें X एक स्वेच्छ समुच्चय है Y एक 2-दूरीक समष्टि है, और प्रतिचित्रणों 2, $f: X \to Y$ के लिए एक धनात्मक नियतांक $k<1$ का अस्तित्व इस प्रकार हो कि (उक्त) (स-1), (स-2) तथा निम्नलिखित संतुष्ट होता है–

$d(fx, fy, a) \le kd(gx, gy, a)$, $x, y \in X$, $a \in Y$. तब उक्त प्रमेय (अर्थात् दूरीक समष्टि पर युसंसि) के सभी निष्कर्ष सत्य हैं, यदि (iii) के स्थान पर Y के प्रत्येक a के लिए निम्नलिखित को लें–

$d(gx_n, gz, a) \le k^n d(fx_0, fz, a)$.

युंक संकुचन का परीक्षण. हाल ही में सिंह [234] ने R^1 (वास्तविक रेखा) पर एक महत्वपूर्ण परीक्षण प्रमेय देते हुए संख्यात्मक विश्लेषण एवं विविक्त गतिकीय तंत्र में इसके अनुप्रयोगों की चर्चा की है।

परीक्षण प्रमेय [235]. मान लें $ga \ne gb$ के साथ [a, b] पर g व f अवकलनीय स्वप्रतिचित्रण हैं। किसी भी $t \in (a, b)$ के लिए $f'(t)$ व $g'(t)$ दोनों शून्य नहीं हैं। तब [a, b] पर युग्म प्रतिचित्रण {f, g} युंक संकुचन है (अर्थात् $|fx - fy| \le q\,|gx - gy|$) यदि और केवल यदि एक ऐसे धनात्मक नियतांक $q<1$ का अस्तित्व होता है कि (a, b) के प्रत्येक x के लिए

$|f'(x)| \le q\,|g'(x)|$.

{इस प्रमेय में [a, b] व (a, b) क्रमशः संवृत व विवृत अंतराल हेतु प्रयुक्त हुए हैं।}

4. 2-दूरीक के नए कदम

कार्ल मेंगर द्वारा अन्वेषित प्रायिकतात्मक दूरीक समष्टि की अवधारणा (देखें [18], [85], [132], [181]-[185], [209], [217], [223] व [209] के अनेक निर्देश) के आलोक में वेंजही [241] ने प्रायिकतात्मक 2-दूरीक समष्टि की अवधारणा प्रस्तुत की। इस अभिनव समष्टि के कतिपय गुण-धर्मों का संक्षिप्त विवरण चैंग-चो-कांग [209] की हाल की पुस्तक में भी अनुस्यूत है। चैंग-हुयांग [20], जेयोंग [218] तथा सिंह-तलवार-वेंजही [238]-[240] द्वारा प्रायिकतात्मक 2-दूरीक समष्टियों में संकुचनीय एवं प्रसारी प्रतिचित्रणों के स्थिर बिंदु प्रमेयों के अध्ययन का श्रीगणेश होता है। (जेयोंग [218] पर एक टिप्पणी हेतु आगामी अनुभाग अवलोकनीय है।)

बी०सी० धगे [210]-[211] ने 2-दूरीक की अंतिम दो अभिगृहीतियों (अर्थात् तीन चरों में सममिति एवं त्रिभुजीय असमिका) को ज्यों का त्यों लेते हुए तथा प्रथम दो अभिगृहीतियों [(द-1) व (द-2)] में कतिपय परिवर्तन करते हुए एक नए प्रकार के 2-दूरीक की अवधारणा प्रस्तुत की है, जिसे धगे [210]-[213] ने D-दूरीक कहा है (देखें [230] भी)। मान लें X एक अरिक्त समुच्चय है और $D: X \times X \times X \to R_+$ (ऋणेतर संख्याएँ) इस प्रकार हैं कि–

(ध-1) $D(x, y, z) = 0$ यदि और केवल यदि $x = y = z$;

(ध-2) $D(x, y, z) = D(x, z, y) = D(y, x, z)$;

(ध-3) $D(x, y, z) \le D(x, y, w) + D(x, w, z) + D(w, y, z)$.

तब (X, D) को D-दूरीक समष्टि कहा गया है।

D-दूरीक समष्टि पर स्थिर बिंदु प्रमेय एवं उनके अनुप्रयोगों के अध्ययन हेतु धगे [212]-[213] एवं रोअडेस [230] के कार्य उल्लेखनीय हैं।

5. हसियाओ के आलेख पर टिप्पणी

एक 2-दूरीक समष्टि X पर संकुचन स्व-प्रतिचित्रण T (एवं संकुचनीय वर्ग के कतिपय स्व-प्रतिचित्रणों) हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय की उपपत्ति में यह पाया गया कि

$d(x_i, x_j, x_t) = 0$

जहाँ X के किसी बिंदु x_o हेतु पारिभाषित पुनरावृत्तिकों के कक्षक,

$\{x_n : x_n = Tx_{n-1}, n = 1, 2, ...\}$

के x_i, x_j, x_t कोई अवयव हैं। इस तथ्य को आधार बनाकर चिह-रु हसियाओ [76] ने अनुभव किया कि इस परिघटना के कारण प्रतिचित्रण T तुच्छ हो जाता है, अर्थात् 2-दूरीक समष्टि पर संकुचन वर्ग के स्व-प्रतिचित्रण अरैखिक नहीं हो सकते। ध्यान देने योग्य है कि कक्षक समष्टि X में अंतर्विष्ट है, अर्थात् प्रतिचित्रण T केवल कक्षक पर रैखिक गुण-धर्म रख सकता है न कि पूरी समष्टि X पर। सिंह-कुमार-गांगुली [179] एवं लोहनी [221] ने 2-दूरीक समष्टि पर स्थिर बिंदु प्रमेयों की प्रगति में बाधक हसियाओ [76] की इस टिप्पणी की निरर्थकता पर सोदाहरण अच्छा प्रकाश डाला है। वस्तुतः [179] के उदाहरण हसियाओ की की संदर्भित टिप्पणी को तुच्छ दिखाने में सफल प्रतीत होते हैं (देखें [221] भी)। अस्तु, हसियाओ की इस टिप्पणी को आधार बनाकर 2-प्रायिकतात्मक समष्टियों पर प्राप्त किए गए कतिपय स्थिर बिंदु प्रमेयों का विस्तार करते हुए अर्थात् अपने अन्य प्रमेयों को तुच्छ बताने का जेयोंग [218] का प्रयास भी स्वतः अस्वीकार्य है। यह उल्लेख करना संदर्भ से परे नहीं होगा कि गणित के एक अंतर्राष्ट्रीय सम्मेलन [वस्तुतः प्रोफेसर शिव नारायण लाल द्वारा आयोजित सम्मेलन 2-5 मार्च 1998, गणित विभाग, काशी हिंदू विश्वविद्यालय, वाराणसी] में अंतर्राष्ट्रीय ख्याति लब्ध-गणितज्ञ एवं अलीगढ़ मुस्लिम विश्वविद्यालय के कुलपति डॉ० ए०एच० सिद्दीकी ने लेखक-द्वय के साथ एक चर्चा में बताया कि गणित एवं कंप्यूटर विज्ञान की नई विधा भंजक सिद्धांत में 2-दूरीक समष्टियों पर प्रतिचित्रणों के स्थिर बिंदु प्रमेयों के अनुप्रयोग की पर्याप्त संभावना है। उल्लेख्य है कि भंजक सिद्धांत में हउसडार्फ दूरीक समष्टि पर बहुमानीय स्वप्रतिचित्रण हेतु बासंसि का प्रयोग सुझात है।

द्वितीय अध्याय

2-दूरीक समष्टि में संकुचनीय प्रतिचित्रणों के स्थिर बिंदु

प्रस्तुत अध्याय में विभिन्न संकुचनीय शर्तों के अधीन 2-दूरीक समष्टि में स्थिर बिंदु प्रमेय सिद्ध किए गए हैं। यह अध्याय निम्नलिखित अनुभागों में विभाजित हैं :

1. परिभाषाएं एवं उदाहरण
2. दो प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय
3. परिमेय असमिकाओं हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय
4. सुसंगत प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय
5. दुर्बल* क्रमविनिमेयी प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय

1. परिभाषाएं एवं उदाहरण

परिभाषा 1.1 [156}. दूरीक समष्टि (M, d) पर स्व-प्रतिचित्रणों P व T को दुर्बल क्रमविनिमेयी कहा जाता है यदि M के प्रत्येक x के लिए

$d(PTx, TPx) \le d(Px, Tx)$.

स्पष्टतया, M पर क्रमविनिमेयी युगल दुर्बल क्रमविनिमेयी भी होंगे, परन्तु इसके विलोम का सत्य होना आवश्यक नहीं है। यह निम्नलिखित उदाहरण से प्रदर्शित होता है :

उदाहरण 1.1 [156]. मान लें M = [0, 1], d एक निरपेक्ष मान दूरीक है तथा स्व-प्रतिचित्रण P व T समष्टि M के प्रत्येक x या a तथा a > 1 के लिए निम्न प्रकार पारिभाषित हैं :

$Px = x/(2a + x),\ Tx = x/a$.

स्पष्टतः P एवं T दुर्बल क्रमविनिमेयी हैं परंतु क्रमविनिमेयी नहीं हैं।

परिभाषा 1.2 [120]. मान लें P एवं T 2-दूरीक समष्टि (X, d) पर स्व-प्रतिचित्रण हैं, तब P एवं T को किसी बिंदु $x \in X$ पर दुर्बल क्रमविनिमेयी कहा जाएगा यदि X के प्रत्येक a के लिए

$d(PTx, TPx, a) \le d(Px, Tx, a)$,

यदि P एवं T समष्टि X के प्रत्येक बिंदु पर इसी प्रतिबंध को संतुष्ट करें तो वे दुर्बल क्रमविनिमेयी कहे जाएंगे।

निम्नलिखित उदाहरण से स्पष्ट है कि दुर्बल क्रमविनिमेयी प्रतिचित्रणों का क्रमविनिमेयी होना आवश्यक नहीं है जबकि इसका विलोम सदैव सत्य है :

उदाहरण 1.2 [120]. मान लें X = {1, 2, 3, 4} तथा दूरीक $d: X \times X \times X \to [0, \infty)$ को निम्नलिखित प्रकार पारिभाषित करें

$$d(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{यदि } x = y \text{ या } y = z \text{ या } z = x \text{ या} \\ & \{x, y, z\} = \{1, 2, 3\} \\ \tfrac{1}{2} & \text{अन्यथा.} \end{cases}$$

स्व-प्रतिचित्रणों S एवं T को इस प्रकार पारिभाषित करें :

$S1 = S2 = S3 = S4 = 2$

तथा

$T1 = T2 = T3 = T4 = 3$.

तब (X, d) एक 2-दूरीक समष्टि है और S एवं T दुर्बल क्रमविनिमेयी हैं परंतु क्रमविनिमेयी नहीं हैं।

परिभाषा 1.3 [189]. दूरीक समष्टि (M, d) स्व-प्रतिचित्रणों P व T को उपगामितः क्रमविनिमेयी या u-उपगामितः क्रमविनिमेयी (जिसे युंक [88] द्वारा सुसंगत भी कहा जाता है) कहा जाएगा यदि और केवल यदि

सीमा$_n$ $d(PTx_n, TPx_n) = 0$;

जबकि X में $\{x_n\}$ इस प्रकार का अनुक्रम है कि X के किसी बिंदु u के लिए

(*) सीमा$_n$ Px_n = सीमा$_n$ $Tx_n = u$.

स्पष्टतया शर्त (*) को संतुष्ट करने वाले दुर्बल क्रमविनिमेयी प्रतिचित्रण युगल उपगामितः क्रमविनिमेयी होंगे तथा निम्नलिखित उदाहरण प्रदर्शित करता है कि इसके विलोम का सत्य होना आवश्यक नहीं है :

उदाहरण 1.3 [177]. माना कि $M = [0, \infty)$, $Px = 2x^2$, $Tx = 3x^2$ तथा M पर d निरपेक्ष मान दूरीक है, तब

$d(PTx, TPx) = 6x^4$

एवं

$d(Tx, Px) = x^2$-

स्पष्टतया M के सभी बिंदुओं x के लिए

$d(PTx, TPx) \not\le d(Tx, Px)$.

अस्तु P व T दुर्बल क्रमविनिमेयी नहीं हैं, किंतु यदि

$x_n = 2^{-n}$ तब

$Px_n \to 0, Tx_n \to 0, d(PTx_n, TPx_n) \to 0$

और P व T u-उपगामितः क्रमविनिमेयी प्रतिचित्रण हैं, जहां $u = 0$.

आलेखों [88], [152], [177] व [189] में यह दावा किया गया है कि सुसंगत अथवा उपगामितः क्रमविनिमेयी प्रतिचित्रण युगल {P, T} दुर्बल क्रमविनिमेयी होंगे, किंतु हाल ही में एस.एल. सिंह ने 'मैथेमेटिकल रिव्यूज़' (देखें MR 89h : 54030 या उदाहरण 1.4) के लिए प्रोफेसर युंक के आलेख [90] का पुनरावलोकन करते समय एक उदाहरण देते हुए यह टिप्पणी की कि दूरीक समष्टि में दुर्बल क्रमविनिमेयी प्रतिचित्रण युगल आवश्यक नहीं कि उपगामितः क्रमविनिमेयता (या सुसंगतता) की शर्त को संतुष्ट करने के लिए समष्टि में किसी अनुक्रम $\{x_n\}$ का अस्तित्व हो ही। ऐसी स्थिति में f व g को रिक्ततः सुसंगत प्रतिचित्रण कहा जा सकता है।

उदाहरण 1.4. मान लें $M = [1, \infty)$, d = निरपेक्ष मान दूरीक, तथा $f.g : M \to M$ जहां $fx = 1 + x$, $gx = 1 + 2x$. स्पष्टतया

$$d(fgx, gfx) = 1 \le x = d(fx, gx).$$

अस्तु, f एवं g दुर्बल क्रमविनिमेयी हैं किन्तु समष्टि M में किसी ऐसे अनुक्रम $\{x_n\}$ का अस्तित्व नहीं मिलता जिसके लिए f व g सुसंगत प्रतिचित्रण हो सकें।

परिभाषा 1.4 [177]. माना P एवं T किसी 2-दूरीक समष्टि (X, d) पर स्व-प्रतिचित्रण हैं तब P और T को X पर उपगामितः क्रमविनिमेयी या सुसंगत कहा जाएगा यदि और केवल यदि X के प्रत्येक a के लिए

$$\text{सीमा}_n\ d(PTx_n, TPx_n, a) = 0$$

जबकि $\{x_n\} \subset X$ इस प्रकार का अनुक्रम है कि

$$\text{सीमा}_n\ Px_n = \text{सीमा}_n\ Tx_n = u.$$

परिभाषा 1.5 [154]. मान लें दूरीक समष्टि (M, d) पर S एवं T दो स्व-प्रतिचित्रण हैं, समष्टि M में अनुक्रम $\{x_n\}$ को S के सापेक्ष उपगामितः T-नियमित कहा जाएगा यदि

$$\text{सीमा}_n\ d(Sx_n, Tx_n) = 0.$$

परिभाषा 1.6 [193]. मान लें 2-दूरीक समष्टि (X, d) पर S एवं T दो स्व-प्रतिचित्रण हैं। समष्टि X में अनुक्रम $\{x_n\}$ को S के सापेक्ष उपगामितः T-नियमित कहा जाएगा यदि X के प्रत्येक a के लिए

$$\text{सीमा}_n\ d(Sx_n, Tx_n, a) = 0.$$

परिभाषा 1.7. [137]. मान लें दूरीक समष्टि (M, d) पर S व T दो स्व-प्रतिचित्रण हैं, तब समष्टि M में एक अनुक्रम $\{x_n\}$ को S के सापेक्ष उपगामितः T^2- नियमित कहा जायेगा यदि

$$\text{सीमा}_n\ d(S^2x_n, T^2x_n) = 0.$$

परिभाषा 1.8. मान लें (X, d) एक 2-दूरीक समष्टि है तथा S एवं T समष्टि X पर दो स्व-प्रतिचित्रण हैं। तब समष्टि M में एक अनुक्रम $\{x_n\}$ को S^2 के सापेक्ष उपगामितः T^2- नियमित कहा जाएगा यदि X के प्रत्येक a के लिए

$$\text{सीमा}_n\ d(S^2x_n, T^2x_n, a) = 0.$$

परिभाषा 1.9 [137]. मान लें दूरीक समष्टि (M, d) पर S एवं T दो स्व-प्रतिचित्रण हैं, तब युगल (S, T) को दुर्बल* क्रमविनिमेयी कहा जाएगा यदि M के प्रत्येक x के लिए

$$d(STx, TSx) \le d(S^2x, T^2x).$$

स्पष्टतया, प्रत्येक क्रमविनिमेयी युगल दुर्बल* क्रमविनिमेयी होता है परन्तु इसके विलोम का सदैव सत्य होना आवश्यक नहीं है। यह निम्नलिखित उदाहरण से प्रदर्शित होता है :

उदाहरण 1.5. [137]. मान लें M = [0, 1] निरपेक्ष मान दूरीक के साथ दूरीक समष्टि है। M के प्रत्येक x के लिए S एवं T निम्नवत् पारिभाषित हैं :

$$Sx = x/(x + 2),\ Tx = x/2.$$

तब S एवं T दुर्बल* क्रमविनिमेयी हैं परन्तु क्रमविनिमेयी नहीं हैं।

परिभाषा 1.10. 2-दूरीक समष्टि (X, d) पर स्व-प्रतिचित्रणों S एवं T को दुर्बल* क्रमविनिमेयी कहा जाएगा यदि X के प्रत्येक x व a के लिए

$$d(STx, TSx, a) \le d(S^2x, T^2x, a).$$

दूरीक समष्टि पर दुर्बल/दुर्बल* क्रमविनिमेयी एवं उपगामितः क्रमविनिमेयी (या सुसंगत) प्रतिचित्रणों को अधिक व्यापक स्तर पर अध्ययन करने के उद्देश्य से हाल ही में आर०पी० पंत [225] के नये वर्ग के प्रतिचित्रणों का सन्निवेशन किया है, जो यथातथ्यतः निम्नवत् है (देखें [226] भी)–

परिभाषा 1.11 [225]. किसी धनात्मक संख्या R के लिए दूरीक समष्टि (M, d) पर स्वप्रतिचित्रणों S व T को दुर्बल क्रमविनिमेयी कहते हैं यदि M के प्रत्येक बिंदु x हेतु

$$d(STx, TSx) \le Rd(Sx, Tx).$$

परिभाषा 1.12. किसी धनात्मक संख्या R के लिए दूरीक समष्टि (X, d) पर

स्व-प्रतिचित्रणों S व T को X के किसी बिंदु x पर क्रमविनिमेयी कहा जाएगा यदि समष्टि X के प्रत्येक a के लिए

$$d(STx, TSx, a) \le Rd(Sx, Tx, a).$$

यदि समष्टि के प्रत्येक बिंदु x पर यही प्रतिबंध संतुष्ट हो रहा हो तो S व T को R-दुर्बल क्रमविनिमेयी कहा जाएगा।

उदाहरण 1.6 [225]. मान लें $M = [1, \infty)$ निरपेक्ष मान दूरीक समष्टि है तथा M के प्रत्येक बिंदु x के लिए S एवं T निम्नवत् पारिभाषित हैं–

$$Sx = 2x - 1, \quad Tx = x^2.$$

तब $R \geq 2$ के साथ S व T R-दुर्बल क्रमविनिमेयी हैं, किंतु S व T दुर्बल क्रमविनिमेयी नहीं हैं।

टिप्पणी. दुर्बल क्रमविनिमेयता तथा R=1 के साथ R-दुर्बल क्रमविनिमेयता स्पष्टतया एक समान हैं।

क्रमविनिमेयता के विभिन्न दुर्बल स्वरूप (यथा दुर्बल/R-दुर्बल/उपगामितः क्रमविनिमेयता आदि) समष्टि के दूरीक से निबद्ध होने के कारण, सिंह [234, पृ० 64] ने प्रेक्षित किया है कि किसी समष्टि Z के दो स्व-प्रतिचित्रण यदि (उदाहरणार्थ) दुर्बल क्रमविनिमेयी नहीं हैं तो Z पर अन्य दूरीक लेने से वे स्व-प्रतिचित्रण दुर्बल क्रमविनिमेयी हो सकते हैं, अथवा इसका विलोम भी हो सकता है। यह तथ्य निम्नलिखित उदाहरण से अधिक स्पष्ट होता है :

उदाहरण 1.7 [234]. मान लें $Z = [1, \infty)$ तथा Z के प्रत्येक x के लिए $Sx = 1 + x$, $Tx = 2 + x^2$. यदि Z पर निरपेक्ष मान दूरीक लें तो S व T निरपेक्ष मान दूरीक समष्टि Z पर दुर्बल क्रमविनिमेयी नहीं हैं। परंतु यदि Z पर विविक्त दूरीक लें तो S व T विविक्त दूरीक समष्टि Z पर R-दुर्बल और (इसलिए) दुर्बल क्रमविनिमेयी हो जाते हैं। [विविक्त दूरीक समष्टि Z में दूरीक d इस प्रकार पारिभाषित होता है कि Z के प्रत्येक x, y हेतु $d(x, y) = 0$ यदि $x = y$ तथा $d(x, y) = 1$ यदि x व y भिन्न हों।]

2. दो प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय

1978 में चुंग [27] ने दूरीक समष्टि (M, d) पर परिभाषित दो प्रतिचित्रणों के लिए निम्नलिखित संकुचन शर्त के अधीन कुछ स्थिर बिंदु प्रमेय प्राप्त किए जो बायड-वांग [14], चुंग [26] (इस आलेख पर विशेष टिप्पणी हेतु रोअडेस [146] देखें) फिशर [47],

आदि के परिणामों का विस्तारण करती हैं।

(*) $d(Sx, TSy)$

$$\le k(d(x, Sy)) \text{ अधिकतम } \{d(x, Sy), d(x, Sx), d(Sy, TSy), \tfrac{1}{2}[d(x, TSy) + d(Sy, Sx)]\};$$

जहां समस्त $x, y \in M$ तथा k दायें से $\bar{P} - \{0\}$ पर उपरि सामिसंतत है और $\bar{P} - \{0\}$ के प्रत्येक t के लिए $k(t) < 1$, जहां $P = \{d(x, y) : x, y \in M\}$.

हाल ही में पाचपट्टे [130] ने चुंग [27] के परिणामों के आलोक में एक नई प्रकार की संकुचन शर्त के अधीन कुछ स्थिर बिंदु प्रमेय प्राप्त किए।

(**) $[d(Sx, TSy]^2$

$$\le k(d(x, TSy)). \text{ अधिकतम } \{d(x, Sx,). d(Sy, TSy), d(x, TSy). d(Sy, Sx), \tfrac{1}{2} d(x, Sx). d(Sy, Sx), \tfrac{1}{2}\{d(x, TSy). d(Sy, TSy)\}\};$$

जहां समस्त $x, y \in M$ तथा k दाएं से $\bar{P} - \{0\}$ पर उपरिसामि-संतत है और $\bar{P}$ - (0) के प्रत्येक t के लिए $k(t) < 1$, जहां $P = \{d(x, y) : x, y \in M\}$.

प्रस्तुत अनुभाग में हम शर्त (*) एवं (**) से प्रेरणा लेकर 2-दूरीक समष्टि में क्रमशः प्रमेय 2.1 एवं प्रमेय 2.2 सिद्ध कर रहे हैं। इस अनुभाग में परिणाम निम्नवत् हैं :

प्रमेय 2.1. मान लें (X, d) एक पूर्ण 2-दूरीक समष्टि है तथा S एवं T समष्टि X पर स्व-प्रतिचित्रण हैं यदि धन संख्याओं k एवं p (जहां $0 < k < 1$, $kp < 1/2$) का अस्तित्व इस प्रकार हो कि X के सभी x, y, a के लिए

(2.1.1) $d(Sx, TSy, a)$

$$\le k \text{ अधिकतम } \{d(x, Sy, a), d(x, Sx, a), d(Sy, TSy, a), p[d(x, TSy, a) + d(Sy, Sx, a)]\};$$

संतुष्ट हों तो S एवं T के एक अद्वितीय स्थिर बिंदु का अस्तित्व होगा।

उपपत्ति. माना x_0 समष्टि X का कोई बिंदु है। समष्टि के बिंदुओं से एक अनुक्रम इस प्रकार पारिभाषित करें कि

$$x_1 = Sx_o,\ x_2 = Tx_1,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ x_{2n+1} = Sx_{2n},$$

$$x_{2n+2} = Tx_{2n+1},\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

सुविधा के लिए मान लें

$$d_n = d(x_n, x_{n+1}, a).$$

अब (2.1.1) से

(2.1.2) d_{2n+1}

$$\le k \text{ अधिकतम } \{d_{2n}, d_{2n+1}, pd(x_{2n}, x_{2n+2}, a)\}.$$

अब त्रिभुजीय असमिका से

$$d_{2n+1} \le k \text{ अधिकतम } \{d_{2n}, d_{2n+1}, p[d_{2n} + d_{2n+1} + d(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+2})]\}.$$

इसमें $a = x_{2n}$ लेने पर

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n}) \le 2kp\, d(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n})$$

जिससे

$$d(Sx_{2n}, TSx_{2n}, a)$$

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n}) = 0, \text{ चूंकि } 2kp < 1.$$

अतः (2.1.2) से

$$d_{2n+1} \le q\, d_{2n}, \text{ जहां } 1 > q = \text{ अधिकतम } \{k, kp/(1-kp)\},$$

इसी प्रकार

$$d_{2n+2} \le q\, d_{2n+1}.$$

अस्तु

$$d_{n+1} \le q\, d_n.$$

प्रमेयिका [168, पृ. 2] के आलोक में अनुक्रम $\{x_n\}$ कोशी है, अतः समष्टि X के किसी बिंदु z पर अभिसरित होगा। पुनः (2.1.1) से

$$d(Sz, z, a)$$
$$\le d(Sz, z, Tx_{2n+1}) + d(Sz, Tx_{2n+1}, a) + d(Tx_{2n+1}, z, a)$$
$$= d(Sz, z, x_{2n+2}) + d(Sz, TSx_{2n}, a) + d(x_{2n+2}, z, a)$$
$$\le d(Sz, z, x_{2n+2}) + k \text{ अधिकतम } \{d(z, Sx_{2n}, a), d(z, Sz, a),$$
$$d(Sx_{2n}, TSx_{2n}, a), p[d(z, TSx_{2n}, a) + d(Sx_{2n}, Sz, a)]\} + d(x_{2n+2}, z, a)$$
$$= d(Sz, z, x_{2n+2}) + k \text{ अधिकतम } \{d(z, x_{2n+1}, a), d(z, Sz, a),$$
$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}, a), p[d(z, x_{2n+2}, a) + d(x_{2n+1}, Sz, a)]\} + d(x_{2n+2}, z, a).$$

अब n का सीमांत मान लेने पर

$$d(Sz, z, a)$$
$$\le k \text{ अधिकतम } \{d(z, Sz, a), pd(z, Sz, a)\}$$
$$\le \text{ अधिकतम } \{k, kp\}\, d(z, Sz, a).$$

चूंकि $1 >$ अधिकतम $\{k, kp\}$ इसलिए

$$z = Sz.$$

इसी प्रकार $z = Tz$,

अर्थात् z प्रतिचित्रणों S एवं T का उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है।

z की अद्वितीयता सिद्ध करने के लिए, मान लें X में एक अन्य बिंदु z_1 का अस्तित्व इस प्रकार है कि

$$z_1 = Sz_1 = Tz_1$$

तब

$$d(z_1, z, a) = d(Sz_1, TSz, a)$$
$$\le k \text{ अधिकतम } \{d(z_1, Sz, a), d(z_1, Sz_1, a), d(Sz, TSz, a).$$
$$p[d(z_1, TSz, a) + d(Sz, Sz_1, a)]\}$$
$$= k \text{ अधिकतम } \{d(z_1, z, a), p[2d(z_1, z, a)]\}$$
$$= \text{ अधिकतम } \{k, 2pk\}\, d(z_1, z, a),$$

जिससे

$$z = z_1, \text{ चूंकि, } 1 > \text{ अधिकतम } \{k, 2kp\}.$$

प्रमेय 2.2. मान लें (X, d) एक पूर्ण 2-दूरीक समष्टि है तथा S एवं T समष्टि X पर स्व-प्रतिचित्रण हैं। यदि धन संख्याओं k एवं p (जहां, $0 < k < 1$, $kp < 1/2$) का अस्तित्व इस प्रकार हो कि X के सभी x, y, a के लिए

(2.2.1) $[d(Sx, TSy, a)]^2$

$$\le k \text{ अधिकतम } \{d(x, Sx, a).\, d(Sy, TSy, a), d(x, TSy, a), d(Sy, Sx, a),$$
$$pd(x, Sx, a).\, {*d}(Sy, Sx, a), pd(x, TSy, a).\, d(Sy, TSy, a)\};$$

संतुष्ट हो तो S एवं T के एक अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु का अस्तित्व होगा।

उपपत्ति. माना x_0 समष्टि X का कोई बिंदु है। समष्टि के बिंदुओं से एक अनुक्रम इस प्रकार पारिभाषित करें कि $x_1 = Sx_0$, $x_2 = Tx_1$, ..., $x_{2n+1} = Sx_{2n}$,

$x_{2n+2} = Tx_{2n+1}, ...$

सुविधा के लिए मान लें

$d_n = d(x_n, x_{n+1}, a).$

(2.2.2) अब (2.2.1) से

$d^2_{2n+1} = [d(Sx_{2n}, TSx_{2n}, a)]^2$

$\leq k$ अधिकतम $\{d_{2n}.d_{2n+1}, 0, pd(x_{2n}, x_{2n+2}, a).d_{2n+1}\}$

$\leq k$ अधिकतम $\{d_{2n}.d_{2n+1}, p[d_{2n} + d_{2n+1} + d(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+2})].d_{2n+1}\}.$

इसमें $a = x_{2n}$ लेने पर

$[d(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+2})]^2 \leq 2kp[d(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+2})]^2,$

जिससे

$d(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+2}) = 0$, क्योंकि $2kp < 1$.

पुनः (2.2.2) से

$d^2_{2n+1} \leq k$ अधिकतम $[d_{2n}.d_{2n+1}, p[d_{2n} + d_{2n+1}]. d_{2n+1}],$

जिससे

$d_{2n+1} \leq qd_{2n}$, जहां $1 > q =$ अधिकतम $\{k, kp/(1-kp)\}.$

इसी प्रकार

$d_{2n+2} \leq qd_{2n+1}.$

अस्तु $d_{n+1} \leq qd_n.$

अब प्रमेयिका ([168] पृ. 2) के आलोक में स्पष्ट है कि अनुक्रम $\{x_n\}$ कोशी है। चूंकि समष्टि (X, d) पूर्ण है, इसलिए यह अनुक्रम X के किसी बिंदु z पर अभिसरित होगा। अब हम सिद्ध करेंगे कि S एवं T का z उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है।

$[d(z, Sz, a)]^2$

$\leq [d(z, Sz, Tx_{2n+1}) + d(z, Tx_{2n+1}, a) + d(Tx_{2n}, Sz, a)]^2$

$= [d(z, Sz, x_{2n+2})] + [d(z, x_{2n+2}, a)]$

$+ d(TSx_{2n}, Sz, a)]^2 = [d(z, Sz, x_{2n+2})]^2$

$+[d(z, x_{2n+2}, a)]^2$

3A-18 HRD 99

$+ k$ अधिकतम $\{d (z, Sz, a) d_{2n+1}, d(z, X_{2n+2}, a)$

$.d(x_{2n+1}, Sz, a), pd(z, Sz, a). d(x_{2n+1}, Sz, a),$

$pd (z, x_{2n+2}, a). d(x_{2n+1}, x_{2n+2}, a) \}$

$+ 2d(z, Sz, x_{2n+2}). d(z, x_{2n+2}, a) + 2 d (z, x_{2n+2}, a)$

$d(x_{2n+2}, Sz, a) + 2d(x_{2n+2}, Sz, a). d(z, x_{2n+2}, Sz).$

अब n का सीमांत मान लेने पर

$[d(z, Sz, a)]^2 \leq k\, p[d(z, Sz, a)]^2,$

जिससे

$z = Sz$, चूंकि $kp < 1/2$.

इसी तरह

$z = Tz$

अतः z प्रतिचित्रणों S एवं T का एक उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है। प्रमेय 2.1 के समान यह सिद्ध किया जा सकता है कि बिंदु z अद्वितीय है।

3. परिमेय असमिकाओं हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय

द्विविक्कारो-फिशर-सेसा [40], फिशर [48]-[49], फिशर-खान [53] आदि ने सममित परिमेय असमिकाओं को संतुष्ट करने वाले युगल प्रतिचित्रणों के लिए कुछ स्थिर बिंदु प्रमेय स्थापित किए। दूसरी ओर बजाज [9] और पाठक [136] द्वारा कुछ असममित असमिकाओं को संतुष्ट करने वाले प्रतिचित्रणों के लिए कुछ स्थिर बिंदु प्रमेय प्राप्त किए गए। पाठक [136] द्वारा निम्नलिखित प्रतिबंध का अध्ययन किया गया :

मान लें (M, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि है तथा S एवं T समष्टि M पर स्व-प्रतिचित्रण ऐसे हैं कि M के प्रत्येक x, y के लिए

(*) $d(Sx, Ty)$

$\leq p\, \{d(x, Sx)\, [d(x, Ty) + d(x, y)]+[d(x, y)]^2\}/\{d(x, Sx) + d(x, Ty) + d(x, y)\}$

$+ q\, \{d(x, Sx)\, [d(x, Ty) + d(x, y)]\}/\{d(x, Sx) + d(x, Ty)\} + rd(x, y)$

संतुष्ट हो, जहाँ $p, q, r > 0$, $p + q + r < 1$ तथा $d(x, Sx) + d(x, Ty) \neq 0$. प्रस्तुत अनुभाग

में हम प्रतिबंध (*) का अध्ययन 2-दूरीक समष्टि में कर रहे हैं।

प्रमेय 3.1. मान लें (X, d) एक पूर्ण 2-दूरीक समष्टि है तथा S एवं T समष्टि X पर स्व-प्रतिचित्रण हैं। यदि धन संख्याओं p, q, r (जहां $p + q + r < 1$) का इस प्रकार अस्तित्व हो कि X के प्रत्येक x, y, a के लिए

(3.1.1) $$d(Sx, Tx, a) \le p\{d(x, Sx, a)\,[d(x, Ty, a) + d(x, y, a)] + d(x,y,a)]^2\} / \{d(x, Sx, a) + d(x, Ty, a) + d(x, y, a)\} + q\{d(x, Sx, a)\,[d(x,Ty, a) + d(x, y, a)]\} / \{d(x, Sx, a) + d(x, Ty, a)\} + r d(x, y, a)$$

संतुष्ट हो तथा $d(x, Sx, a) + d(x, Ty, a) \ne 0$; तब S एवं T के एक उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु का अस्तित्व होगा। भूयः, यदि $d(x, Sx, a) + d(x, Ty, a) = 0$ तो S एवं T के एक अद्‌वितीय स्थिर बिंदु का अस्तित्व होगा।

उपपत्ति. मान लें समष्टि X में x_o कोई बिंदु है तथा इसमें अनुक्रम $\{x_n\}$ की रचना इस प्रकार की जाती है कि

$$x_{2n+1} = Sx_{2n}$$

और

$$x_{2n+2} = Tx_{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \text{-------}.$$

सुविधा के लिए मान लें $d_n = d(x_n, x_{n+1}, a)$. अब (3.1.1) से

$$d_{2n} \le (p + q + r)\, d_{2n-1}$$

और

$$d_{2n+1} \le (p + q + r)\, d_{2n}.$$

अस्तु,

$$d_n \le (p + q + r)\, d_{n-1}.$$

प्रमेयिका [168, पृ0 2] के आलोक में $\{x_n\}$ एक कोशी अनुक्रम है, अतः समष्टि X के किसी बिंदु z पर अभिसरित होगा। अब हम सिद्‌ध करेंगे कि z प्रतिचित्रण T का स्थिर बिंदु है।

$$d(z, Tz, a) \le d(z, x_{2n+1}, a) + d(Sx_{2n}, Tz, a) + d(z, Tz, x_{2n+1}).$$

इसमें (3.1.1) का प्रयोग करने तथा n का सीमांत मान लेने पर $d(z, Tz, a) \le 0$ जिससे $z = Tz$. इसी प्रकार $Sz = z$.

अब यह दिखाना शेष है कि यदि समष्टि X के प्रत्येक अवयव x, y, a के लिए $d(x, Sx, a) + d(x, Ty, a) = 0$ हो तो उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु z अद्‌वितीय होगा। मान लें समष्टि X में प्रतिचित्रण T का एक अन्य स्थिर बिंदु w है। तब

$$d(z, Sz, a) + d(z, Tw, a) = 0,$$ X के प्रत्येक a के लिए,

जिससे

$$z = Sz = Tw.$$

परन्तु

$$w = Tw.$$

अतः

$$w = z.$$

टिप्पणी 3.1.1. प्रमेय 3.1 में यदि $S = T$, $p = q = 0$ लें तो बानाख़ संकुचन सिद्‌धांत का 2-दूरीक समष्टि में विस्तार (देखें [78] एवं [82]) प्राप्त होता है।

4. सुसंगत प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय

हाल ही में रोअडेस आदि ने आलेखों [152]-[154] में उत्तरोत्तर सन्निकटन के अनुक्रम का प्रयोग किए बिना ही सापेक्ष उपगामी नियमितता की अवधारणा का समावेश करते हुए हार्डी-रोजर प्रमेय (देखें [153], [195]) का विस्तार किया और कई परिणाम उपप्रमेय के रूप में प्राप्त किए। उदाहरणार्थ देखें, (दास–नायक [33], फिशर [51], युंक [87]-[88], कानन [92], रीच [143]).

रोअडेस आदि [152] द्‌वारा चार प्रतिचित्रणों के सुसंगत युगलों के लिए अनुक्रम की सापेक्ष उपगामी नियमितता की संकल्पना का प्रयोग करते हुए निम्न संकुचन शर्त के अधीन कुछ स्थिर बिंदु प्रमेय स्थापित किए गए जो कि चांग [19], फिशर [52], मासा [112], सिंह-कासाहारा [175] आदि के परिणामों को उन्नत करती हैं।

(*) $$d(Ax, By) \le a_1 d(Ax, Sx) + a_2 d(By, Ty) + a_3 d(Sx, By)$$

$+ a_4 d(Ty, Ax) + a_5 d(Sx, Ty)$

जहाँ समस्त $x, y \in M$, M एक पूर्ण दूरीक समष्टि है तथा किसी $h \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ के लिए a_h गुणन समष्टि $X \times X$ पर वास्तविक फलन है।

प्रस्तुत अनुभाग में हम उक्त प्रतिबंध (*) का अध्ययन 2-दूरीक समष्टि में कर रहे हैं।

प्रमेय 4.1. मान लें (X, d) एक पूर्ण 2-दूरीक समष्टि है जिसमें d संतत है। मान लें A, B, S एवं T समष्टि X पर स्व-प्रतिचित्रण हैं। यदि ऋणेतर संख्याओं $a_h \geq 0$ (जहां $h \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$) का अस्तित्व ऐसा है कि X के प्रत्येक x, y, a के लिए

(4.1.1) $d(Ax, By, a)$
$\leq a_1 d(Ax, Sx, a) + a_2 d(By, Ty, a) + a_3 d(Sx, By, a)$
$+ a_4 d(Ty, Ax, a) + a_5 d(Sx, Ty, a);$

(4.1.2) $a_3 + a_4 + a_5 < 1$, $a_1 + a_4$ 1 एवं $a_2 + a_3 < 1$;

(4.1.3) S संतत है;

(4.1.4) $d(x, Tx, a) \leq d(x, Sx, a)$, $x, a \in X$;

(4.1.5) युगल {A, S} सुसंगत है;

(4.1.6) S एवं T के सापेक्ष क्रमशः एक उपगामितः A–नियमित अनुक्रम $\{x_n\}$ और उपगामितः B–नियमित अनुक्रम $\{y_n\}$ का अस्तित्व है;

तो A, B, S एवं T का एक अद्‌वितीय उभनिष्ठ स्थिर बिंदु होगा।

उपपत्ति. किन्हीं धन संख्याओं m एवं n के लिए (4.1.1) से

$d(Ax_m, By_n, a)$
$\leq a_1 d(Ax_m, Sx_m, a) + a_2 d(By_n, Ty_n, a)$
$+ a_3[d(Ax_m, Sx_m, a) + d(Ax_m, By_n, a)$
$+ d(Sx_m, By_n, Ax_m)] + a_4[d(Ax_m, By_n, a)$
$+ d(By_n, Ty_n, a) + d(Ty_n, Ax_m, By_n)]$
$+a_5[A(x_m, Sx_m, a) + d(Ax_m, By_n, a)$
$+ d(By_n, Ty_n, a) + d(Ax_m, By_n, Ty_n)$
$+d(Sx_m, Ty_n, Ax_m)].$

अतः

(4.1.7) $pd(Ax_m, By_n, a)$
$\leq qd(Ax_m, Sx_m, a) + rd(By_n, Ty_n, a)$
$+ a_3 d(Sx_m, By_n, Ax_m) + sd(Ty_n, Ax_m, By_n)$
$+ a_5 d(Sx_m, Ty_n, Ax_m),$

जहां

$p = (1 - a_3 - a_4 - a_5)$, $q = (a_1 + a_3 + a_5)$,
$r = (a_2 + a_4 + a_5)$, $s = (a_4 + a_5)$.

इसी प्रकार

$pd(Ax_n, By_n, a)$
$\leq qd(Ax_n, Sx_n, a) + rd(By_n, Ty_n, a) + a_3 d(Sx_n, By_n, Ax_n)$
$+ sd(Ty_n, Ax_n, By_n) + a_5 d(Sx_n, Ty_n, Ax_n).$

अब त्रिभुजीय असमिका से

(4.1.8) $d(Ax_m, Ax_n, a)$
$\leq d(Ax_m, By_n, a)+ d(Ax_n, By_n, a) + d(Ax_m, Ax_n, By_n)$
$\leq (q/p)\ [d(Ax_m, Sx_m, a) + d(Ax_n, Sx_n, a)]$
$+ (2r/p)\ d(By_n, Ty_n, a) + (a_3/p)\ [d(Sy_n, By_n, Ax_n)$
$+ d(Sx_m, By_n, Ax_m)] + (s/p)\ [d(Ty_n, Ax_m, By_n)$
$+ d(Ty_n, Ax_n, By_n)] + (a_5/p)\ [d(Sx_m, Ty_n, Ax_m)$
$+ d(Sx_n, Ty_n, Ax_n)] + d(Ax_m, Ax_n, By_n).$

अब क्योंकि X के प्रत्येक a के लिए (4.1.7) से सीमा $_{m,n}\ d(Ax_m, By_n, a) = 0.$

इसीलिए सीमा $_{m,n}\ d(Ax_m, By_n, Ax_n) = 0.$

अब (4.1.6) के प्रयोग से (4.1.8) द्‌वारा, n का सीमान्त मान लेने पर

सीमा $_{m,n}\ d(Ax_m, Ax_n, a) = 0.$

अतः अनुक्रम $\{Ax_n\}$ कोशी है, यह अनुक्रम समष्टि X में किसी बिंदु z (मान लें) पर अभिसरित होगा।

अब त्रिभुजीय असमिका से

$d(Sx_n, z, a)$

$\le d(Ax_n, Sx_n, a) + d(Ax_n, z, a) + d(Sx_n, z, Ax_n)$.

(4.1.5) से n का सीमांत मान लेने पर $\{Sx_n\} \to z$.

इसी प्रकार $\{By_n\} \to z$, $\{Ty_n\} \to z$.

(4.1.3) से $\{S^2x_n\} \to Sz$, $\{SAx_n\} \to Sz$

और (4.1.5) से $\{ASx_n\} \to Sz$.

अब पुनः (4.1.1) से

$d(ASx_n, By_n, a)$

$\le a_1 d(ASx_n, S^2x_n, a) + a_2 d(By_n, Ty_n, a)$

$+ a_3 d(S^2x_n, By_n, a) + a_4 d(Ty_n, ASx_n, a)$

$+ a_5 d(S^2x_n, Ty_n, a)$,

और इसमें n का सीमांत मान लेने पर

$d(Sz, z, a) \le (a_3 + a_4 + a_5)\, d(Sz, z, a)$,

जो समष्टि X के प्रत्येक a के लिए (4.1.2) से एक विरोध है. अतः $Sz = z$

पुनः (4.1.1) से

$d(Az, By_n, a)$

$\le a_1 d(Az, Sz, a) + a_2 d(By_n, Ty_n, a) + a_3 d(Sz, By_n, a)$

$+ a_4 d(Az, Ty_n, a) + a_5 d(Sz, Ty_n, a)$,

और n का सीमांत मान लेने पर

$d(Az, z, a) \le (a_1 + a_4)\, d(Az, z, a)$,

और, पूर्व की भाँति, (4.1.2) से

$Az = z$.

अब (4.1.4) से X के प्रत्येक a हेतु

$d(z, Tz, a) \le d(z, Sz, a) = 0$, अतः $z = Tz$.

पुनः (4.1.1) से X के प्रत्येक a हेतु

$d(z, Bz, a) = d(Az, Bz, a) \le (a_2 + a_3)\, d(z, Bz, a)$

जिससे $z = Bz$.

अतः z प्रतिचित्रणों A, B, S एवं T का उभनिष्ठ स्थिर बिंदु है।

मान लें w प्रतिचित्रणों B एवं T का एक अन्य उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है। तब

$d(z, w, a) = d(Az, Bw, a)$

$\le a_1 d(Az, Sz, a) + a_2 d(Bw, Tw, a) + a_3 d(Sz, Bw, a)$

$+ a_4 d(Tw, Az, a) + a_5 d(Sz, Tw, a)$

$= (a_3 + a_4 + a_5)\, d(w, z, a)$,

जो कि, पूर्व की भाँति, (4.1.2) से एक विरोध है। अतः

$w = z$.

इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है कि z प्रतिचित्रणों A एवं S का एकमात्र उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है।

टिप्पणी. उक्त प्रमेय 4.1 में प्रतिचित्रण युगल {A, S} की सुसंगतता के प्रतिबंध (देखें (4.1.5)) के स्थान पर R-क्रमविनिमेयता ले सकते हैं, तथा ऐसा करने पर मामूली परिवर्तनों के साथ उपपत्ति वही रहती है.

5. दुर्बल* क्रमविनिमेयी प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय

फिशर [50] द्वारा 1979 में युंक प्रमेय [87] (प्रथम अध्याय के तृतीय अनुभाग का प्रारंभ अवलोकनीय है) में निम्नलिखित व्यापकीकरण प्रस्तुत किया गया :

प्रमेय 5.1. मान लें (M, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि है तथा S एवं T समष्टि M पर स्व-प्रतिचित्रण हैं। तब S एवं T का समष्टि M में स्थिर बिंदु होगा यदि और केवल यदि एक संतत प्रतिचित्रण A का समष्टि M से $S(M) \cap T(M)$ पर ऐसा अस्तित्व हो कि जो S एवं T के साथ क्रमविनिमेयी हो व समष्टि M के प्रत्येक x, y के लिए निम्नलिखित शर्त (*) को संतुष्ट करें :

(*) $d(Ax, Ay) \le p\, d(Sx, Ty)$, जहां $p \in (0, 1)$.

ऐसा प्रतीत होता है कि उक्त प्रमेय से प्रेरणा प्राप्त कर पाठक [137] ने क्रमविनिमेयता के स्थान पर दुर्बल* क्रमविनिमेयता (देखें परिभाषा 1.9) का प्रयोग करते हुए निम्न शर्त (**) के अधीन युंक प्रमेय का अन्य व्यापकीकरण प्रस्तुत किया।

मान लें R_+ ऋणेतर संख्याओं का समुच्चय है तथा (M, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि है। मान लें $H = \{h : R^5_+ \to R_+ :$ h उपरि सामिसंतत है तथा प्रत्येक चर में अह्रासमान है व प्रत्येक $t > 0$ के लिए $r(t) = h(t, t, a_1 t, a_2 t, a_3 t) < t$, जहां $a_1 + a_2 + a_3 = 4\}$ तथा M के प्रत्येक x, y के लिए

(**) $d^2(Ax, Ay)$

$\leq h(d^2(Sx, Ty), d(Sx, Ax) . d(Ty, Ay),$

$d(Sx, Ay). d(Ty, Ax), d(Sx, Ax). d(Ty, Ax),$

$d(Sx, Ay). d(Ty, Ay)\}.$

हमें निम्नलिखित प्रमेयिका की आवश्यकता होगी :

प्रमेयिका 1.1 [196]. प्रत्येक $t > 0$ के लिए $r(t) < t$ होगा यदि और केवल यदि $r^n(t) = 0$, जहां r^n, r का n बार संयुक्त फलन है।

प्रस्तुत अनुभाग में हम प्रतिबंध (**) का अध्ययन 2-दूरीक समष्टि में कर रहे हैं।

प्रमेय 5.2. मान लें (X, d) एक पूर्ण 2-दूरीक समष्टि है जिसमें d संतत है। मान लें समष्टि X पर A एक स्वेच्छ स्व-प्रतिचित्रण है तथा समष्टि X पर S एवं T स्व-प्रतिचित्रण ऐसे हैं कि निम्नलिखित शर्तें संतुष्ट होती हैं :

(5.2.1) दुर्बल* क्रमविनिमेयी युगलों $\{A, S\}$ एवं $\{A, T\}$ का ऐसा अस्तित्व है कि $AX \subset SX \cap TX$;

(5.2.2) X में एक अनुक्रम $\{x_n\}$ का ऐसा अस्तित्व है जो A^2 के सापेक्ष क्रमशः उपगामितः S^2-नियमित एवं T^2-नियमित है;

(5.2.3) X के प्रत्येक x, y, a के लिए H में एक h ऐसा है कि

$d^2(Ax, Ay, a)$

$\leq h(d^2(Sx, Ty, a), d(Sx, Ax, a). d(Ty, Ay, a),$

$d(Sx, Ay, a). d(Ty, Ax, a), \; d(Sx, Ax, a). d(Ty, Ax, a),$

$d(Sx, Ay, a). d(Ty, Ay, a));$

(5.2.4) किसी $t > 0$ के लिए, $h(t, t, 0, ft, 0) \leq gt$, $h(t, t, 0, 0, ft) \leq gt$ जहां $f = 2$ के लिए $g = 1$ एवं $f < 2$ के लिए $g < 1$ और $r(t) = h(t, t, a_1, t, a_2 t, a_3 t) < t$, जहां $a_1 + a_2 + a_3 = 4$.

तब A, S एवं T का एक अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु होगा।

उपपत्ति. X में x_0 लें. क्योंकि $A(X) \subset S(X)$, $x_1 \in X$ इस प्रकार ले सकते हैं कि $Ax_0 = Sx_1$. इसी प्रकार, क्योंकि $A(X) \subset T(X)$, $x_2 \in X$ इस प्रकार है कि $Ax_1 = Tx_2$. व्यापक रूप में, हम X में अनुक्रम $\{x_n\}$ की रचना इस प्रकार कर सकते हैं कि

$y_{2n} := Sx_{2n+1} = Ax_{2n}$

और

$y_{2n+1} := Tx_{2n+2} = Ax_{2n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

निश्चयात्मक कथन 1. $d_n(a) := d(y_n, y_{n+1}, a)$, हेतु सीमा$_n$ $d_n(a) = 0$.

इसकी उपपत्ति हेतु (5.2.3) से

(5.2.5) $d^2_{2n}(a) = d^2(Ax_{2n}, Ax_{2n+1}, a)$

$= d^2(Ax_{2n+1}, Ax_{2n}, a)$

$\leq h(d^2_{2n-1}(a), d_{2n}(a). d_{2n-1}(a), 0,$

$d_{2n}(a)[d_{2n-1}(a) + d_{2n}(a) + R_{2n-1}], 0)$

जहां $R_{2n-1} = d(Ax_{2n-1}, Ax_{2n}, Ax_{2n+1})$.

अब यदि $R_{2n-1} > 0$, तब (5.2.5) में $a = Ax_{2n-1}$ रखने पर

$R^2_{2n-1} < h(0, 0, 0, 2R^2_{2n-1}, 0)$

$\leq h(R^2_{2n-1}, R^2_{2n-1}, R^2_{2n-1}, 2R^2_{2n-1}, R^2_{2n-1}) \leq R^2_{2n-1}$

यह एक विरोध है, अतः $R_{2n-1} = 0$.

पुनः (5.2.5) से

$d^2_{2n}(a)$

$\leq h(d^2_{2n-1}(a), d_{2n}(a). d_{2n-1}(a), 0,$

$d_{2n}(a)[d_{2n-1}(a) + d_{2n}(a)], 0).$

मान लें किसी n के लिए $d_n > d_{n-1}$. तब $d_{n-1} + d_n = fd_n$, $f < 2$ एवं h प्रत्येक चर में अह्रासमान है, इसलिए

$d^2_{2n}(a) \leq h(d^2_{2n}(a), d^2_{2n}(a), 0, fd^2_{2n}(a), 0).$

इसी प्रकार

$d^2_{2n+1}(a) \leq h(d^2_{2n+1}(a), d^2_{2n+1}(a), 0, 0, fd^2_{2n+1}(a)).$

किसी भी स्थिति में (5.2.4) से

$$d^2_n \le g d^2_n < d^2_n \text{ (चूंकि } g < 1),$$

जो एक विरोध है. अतः किसी n के लिए

$$d_{n-1}(a) > d_n(a).$$

पुनः

$$d^2_1(a) = d^2(Ax_1, Ax_2, a)$$
$$\le h(d^2_0(a), d_0(a).\, d_1(a), 0, 0, [d_0(a) + d_1(a)].d_1(a))$$
$$\le (d^2_0(a), d^2_0(a), d^2_0(a), d^2_0(a), 2d^2_0(a)) = r(d^2_0(a)).$$

व्यापक रूप में

$$d^2_n(a) \le r^n d^2_0(a).$$

यदि $d_0 > 0$ तब प्रमेयिका 1.1 से

सीमा$_n$ $d^2_n(a) = 0$ अर्थात् सीमा$_n$ $d_n(a) = 0$.

अब यदि $d_0(a) = 0$ तब स्पष्ट है कि प्रत्येक n के लिए $d_n(a) = 0$,

अतः

सीमा$_n$ $d_n(a) = 0$.

निश्चयात्मक कथन 2. जबकि m = 0, 1, 2, ..., $d_n(y_m) = 0$.

स्पष्ट है कि m = n+2 के लिए उपरोक्त कथन सत्य है क्योंकि $R_n = 0$.

स्पष्टतया, यह कथन m = n, n+1 के लिए भी सत्य है। मान लें

$$m > n+1, \ m = n+p, \ p > 1.$$

अब यहां पर दो **स्थितियां** हैं :

1. जब m सम संख्या है।
2. जब m विषम संख्या है।

स्थिति 1.

$$d_n(y_m) \le d_n(y_{m-1}) + d_{m-1}(y_n) + d_{m-1}(y_{n+1})$$
$$\le d_n(y_{m-1}) + \{h(d^2_{m-2}(y_n), d^2_{m-2}(y_n),$$
$$d^2_{m-2}(y_n), 2d^2_{m-2}(y_n), d^2_{m-2}(y_n))\}^{1/2}$$

$$+ \{h(d^2_{m-2}(y_{n+1}), d^2_{m-2}(y_{n+1}), d^2_{m-2}(y_{n+1}),$$
$$2d^2_{m-2}(y_{n+1}), d^2_{m-2}(y_{n+1}))\}^{1/2}$$
$$\le d_n(y_{n+p-1}) + \{h^{p-1}(d^2_n(y_n), d^2_n(y_n),$$
$$d^2_n(y_n), 2d^2_n(y_n), d^2_n(y_n))\}^{1/2}$$
$$+ \{h^{p-1}(d^2_n(y_{n+1}), d^2_n(y_{n+1}),$$
$$d^2_n(y_{n+1}), 2d^2_n(y_{n+1}), d^2_n(y_{n+1}))\}^{1/2}$$
$$= d_n(y_{n+p-1}) + 2\{h^{p-1}(0, 0, 0, 0, 0)\}^{1/2}$$
$$= d_n(y_{n+p-1}).$$

इसी प्रकार **स्थिति** 2 के लिए सिद्ध किया जा सकता है कि

$$d_n(y_m) \le d_n(y_{n+p-1}).$$

अतः प्रत्येक m के लिए

$$d_n(y_m)$$
$$\le d_n(y_{n+p-1}) \le \ldots\ldots \le d_n(y_{n+1}) = 0.$$

अब यदि m < n, मान लें n = m + t, t > 1.

तब, क्योंकि $d_{n+1}(a) \le d_n(a)$,

$$d_n(y_m) = d_{m+t}(y_m) \le d_{m+t-1}(y_m) \le \ldots\ldots\ldots$$
$$\le d_m(y_m) = 0.$$

निश्चयात्मक कथन 3. $d(y_i, y_j, y_p) = 0$, जहां $i, j, p \in \{0, 1, 2, \ldots\ldots\}$.

व्यापकता की किसी भी हानि के बिना हम $j < p$ ले सकते हैं। मान लें

$p = j + r \ge 1$. तब

$$d(y_i, y_j, y_{j+r})$$
$$\le d(y_i, y_j, y_{j+r-1}) + d(y_i, y_{j+r-1}, y_{j+r})$$
$$+ d(y_{j+r-1}, y_j, y_{j+r}).$$

अंतिम दो पद निश्चयात्मक कथन 2 से शून्य हो जाते हैं।

फलतः

$$d(y_i, y_j, y_{j+r})$$
$$\le d(y_i, y_j, y_{j+r-1}) \le \ldots\ldots$$

$\le d(y_i, y_j, y_j) = 0.$

इस प्रकार यह कथन सिद्ध हुआ।

निश्चयात्मक कथन 4. $\{y_n\}$ एक कोशी अनुक्रम है।

क्योंकि सीमा$_n$ $d_n=0$ इसलिए यह सिद्ध करना पर्याप्त होगा कि $\{y_{2n}\}$ एक कोशी अनुक्रम है। मान लें ऐसा नहीं है। तब एक $e > 0$ ऐसा है कि प्रत्येक पूर्णांक 2k के लिए पूर्णांक 2n(k) एवं 2m(k)

$$2k \le 2n(k) < 2m(k)$$

को संतुष्ट करते हुए इस प्रकार हैं कि किसी $a \in X$ के लिए

(5.2.6) $d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a) > e.$

प्रत्येक पूर्णांक 2(k) के लिए मान लें 2m(k), 2n(k) से अधिक न्यूनतम ऐसा पूर्णांक है जो (5.2.6) को संतुष्ट करता है। इस प्रकार

(5.2.7) $d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-2}, a) \le e.$

तब प्रत्येक 2k के लिए

$$e < d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a)$$
$$\le d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-2}, a) + d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, y_{2m(k)-2})$$
$$+ d(y_{2m(k)-2}, y_{2m(k)}, a).$$

क्योंकि मध्य पद (यहां तथा निम्नलिखित असमिका के दाएं पक्ष में भी शून्य हो जाता है) और

$$d(y_{2m(k)}, y_{2m(k)-2}, a)$$
$$\le d(y_{2m(k)}, y_{2m(k)-1}, a) + d(y_{2m(k)}, y_{2m(k)-1}, y_{2m(k)-2})$$
$$+ d(y_{2m(k)-1}, y_{2m(k)-2}, a).$$

हमें ज्ञात है कि

$$e < d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a)$$
$$\le d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-2}, a) + d_{2m(k)-1}(a) + d_{2m(k)-2}(a).$$

अस्तु (5.2.7) एवं निश्चयात्मक कथन 1 से

(5.2.8) सीमा$_k$ $d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a) = e.$

त्रिभुजीय असमिका एवं निश्चयात्मक कथन 3 के प्रयोग से स्पष्ट है कि

$$\left|d\left(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-1}, a\right) - d\left(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a\right)\right| \le d_{2m(k)-1}(a)$$

और

$$\left|d\left(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)-1}, a\right) - d\left(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a\right)\right|$$
$$\le d_{2m(k)-1}(a) + d_{2n(k)}(a).$$

क्योंकि (5.2.6) तथा (5.2.7) से, $k \to \infty$ लेने पर

(5.2.9) $d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-1}, a) \to e$

और

(5.2.10) $d(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)-1}, a) \to e.$

अब

$$d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a)$$
$$\le d_{2n(k)}(a) + d(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)}, a)$$
$$+ d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}), y_{2n(k)+1})$$
$$\le d_{2n(k)}(a) + \{hd^2(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-1}, a),$$
$$d_{2n(k)}(a).\ d_{2m(k)-1}(a),\ d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a).$$
$$d(y_{2m(k)-1}, y_{2n(k)+1}, a),\ d_{2n(k)}(a).$$
$$d(y_{2m(k)-1}, y_{2m(k)+1}, a),\ d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a).$$
$$d_{2m(k)-1}(a))\}^{1/2}.$$

k का सीमांत मान लेने पर निश्चयात्मक कथन 1, (5.2.8), (5.2.9), (5.2.10), एवं h के प्रत्येक चर में अह्रासमान गुण और उपरि सामिसांतत्य से

$$e \le \{h(e^2, 0, e^2, 0, 0)\}^{1/2} < r^{1/2}(e^2) < e$$

जो विरोधात्मक है, अतः अनुक्रम $\{Ax_n\}$ कोशी होगा और इसलिए समष्टि X की पूर्णता से X के किसी बिंदु z पर अभिसरित होगा। क्योंकि अनुक्रमों $\{Sx_{2n+1}\}$ एवं $\{Tx_{2n}\}$, $\{Ax_n\}$ के उपानुक्रम हैं, इसलिए ये भी z पर अभिसरित होंगे।

क्योंकि S एवं T संतत हैं। अंतः S एवं T की सांतत्यता से

$$STx_{2n} \to Sz \text{ और } TSx_{2n+1} \to Tz.$$

अतः

$$d(STx_{2n}, TSx_{2n+1}, a) = d(SAx_{2n-1}, TAx_{2n}, a)$$
$$\le d(SAx_{2n-1}, ASx_{2n-1}, a) + d(ASx_{2n-1}, ATx_{2n}, a)$$
$$+ d(ATx_{2n}, TAx_{2n}, a) + d(SAx_{2n-1}, TAx_{2n}, ASx_{2n-1})$$
$$+ d(ASx_{2n-1}, TAx_{2n}, ATx_{2n}).$$

दुर्बल* क्रमविनिमेयता से

$$(5.2.11)\quad d(STx_{2n}, TSx_{2n+1}, a)$$
$$\le d(S^2x_{2n-1}, A^2x_{2n-1}, a) + d(A^2x_{2n}, T^2x_{2n}, a)$$
$$+ d(ASx_{2n-1}, ATx_{2n}, a)$$
$$+ d(S^2x_{2n-1}, A^2x_{2n-1}, TAx_{2n})$$
$$+ d(A^2x_{2n}, T^2x_{2n}, ASx_{2n-1})$$

और (5.2.3) से

$$d(ASx_{2n-1}, ATx_{2n}, a)$$
$$\le \{h(d^2(S^2x_{2n-1}, T^2x_{2n}, a), d(S^2x_{2n-1}, ASx_{2n-1}, a).$$
$$d(T^2x_{2n}, ATx_{2n}, a), d(S^2x_{2n-1}, ATx_{2n}, a).$$
$$d(T^2x_{2n}, ASx_{2n-1}, a), d(S^2x_{2n-1}, ASx_{2n-1}, a).$$
$$d(T^2x_{2n}, ASx_{2n-1}, a), d(S^2x_{2n-1}, ATx_{2n}, a).$$
$$d(T^2x_{2n}, ATx_{2n}, a))\}^{1/2}$$

$$(5.2.12)\quad \le \{h(d^2(S^2x_{2n-1}, T^2x_{2n}, a), [d(S^2x_{2n-1}, SAx_{2n-1}, a)$$
$$+ d(S^2x_{2n-1}, A^2x_{2n-1}, a)].$$
$$[d(T^2x_{2n}, TAx_{2n}, a) + d(T^2x_{2n}, A^2x_{2n}, a)],$$
$$[d(S^2x_{2n-1}, TAx_{2n}, a) + d(T^2x_{2n}, A^2x_{2n}, a)].$$
$$[d(T^2x_{2n}, SAx_{2n-1}, a) + d(S^2x_{2n-1}, A^2x_{2n-1}, a],$$
$$[d(S^2x_{2n-1}, SAx_{2n-1}, a) + d(S^2x_{2n-1}, A^2x_{2n-1}, a)].$$
$$[d(T^2x_{2n}, SAx_{2n-1}, a) + d(S^2x_{2n-1}, A^2x_{2n-1}, a)],$$
$$[d(S^2x_{2n-1}, TAx_{2n}, a) + d(T^2x_{2n}, A^2x_{2n}, a)].$$
$$[d(T^2x_{2n}, TAx_{2n}, a) + d(T^2x_{2n}, A^2x_{2n}, a)])\}^{1/2}.$$

यदि $d(Sz, Tz, a) > 0$, तब n का सीमांत मान लेने पर (5.2.11) से, (5.2.12) एवं (5.2.2)

का प्रयोग करने पर X के प्रत्येक a के लिए

$$d(Sz, Tz, a)$$
$$\le \{h(d^2(Sz, Tz, a), 0, d^2(Sz, Tz, a), 0, 0)\}^{1/2}$$
$$\le r^{1/2}(d^2(Sz, Tz, a))$$
$$< d(Sz, Tz, a)$$

जो एक विरोध है, इसलिए $Sz = Tz$.

पुनः त्रिभुजीय असमिका से

$$d(SAx_{2n+1}, Az, a)$$
$$\le d(SAx_{2n+1}, ASx_{2n+1}, a) + d(ASx_{2n+1}, Az, a)$$
$$+ d(SAx_{2n+1}, ASx_{2n+1}, Az).$$

अब (5.2.3) एवं {A, S} की दुर्बल* क्रमविनिमेयता का प्रयोग करने पर

$$d(SAx_{2n+1}, Az, a)$$
$$\le d(S^2x_{2n+1}, A^2x_{2n+1}, a) + \{h(d^2(S^2x_{2n+1}, Tz, a),$$
$$[d(S^2x_{2n+1}, SAx_{2n+1}, a) + d(S^2x_{2n+1}, A^2x_{2n+1}, a)].$$
$$d(Tz, Az, a), d(S^2x_{2n+1}, Az, a). [d(Tz, SAx_{2n+1}, a)$$
$$+ d(S^2x_{2n+1}, A^2x_{2n+1}, a)], [d(S^2x_{2n+1}, SAx_{2n+1}, a)$$
$$+ d(S^2x_{2n+1}, A^2x_{2n+1}, a)]. [d(Tz, SAx_{2n+1}, a)$$
$$+d(S^2x_{2n+1}, A^2x_{2n+1}, a)], d(S^2x_{2n+1}, Az, a).$$
$$d(Tz, Az, a))\}^{1/2} + d(S^2x_{2n}, A^2x_{2n}, Az).$$

अब n का सीमांत मान लेने पर (5.2.2) से X के प्रत्येक a हेतु

$$d(Sz, Az, a)$$
$$\le \{h(d^2(Sz, Tz, a), d(Sz, Sz, a). d(Tz, Az, a),$$
$$d(Sz, Az, a). d(Tz, Sz, a), d(Sz, Sz, a).$$
$$d(Tz, Sz, a), d(Sz, Az, a). d(Tz, Az, a))\}^{1/2}$$
$$\le \{h(0, 0, 0, 0, d^2(Sz, Az, a))\}^{1/2}$$
$$< r^{1/2}(d^2(Sz, Az, a))$$
$$< d(Sz, Az, a).$$

यह दर्शाता है कि $Sz = Az$, अतः $Az = Sz = Tz$.

अब

$$d(Az, Ax_{2n}, a)$$
$$\leq \{h(d^2(Sz, Tx_{2n}, a), d(Sz, Az, a). d(Tx_{2n}, Ax_{2n}, a),$$
$$d(Sz, Ax_{2n}, a). d(Tx_{2n}, Az, a), d(Sz, Az, a).$$
$$d(Tx_{2n}, Az, a), d(Sz, Ax_{2n}, a).$$
$$d(Tx_{2n}, Ax_{2n}, a))\}^{1/2}$$

n का सीमांत मान लेने पर

$$d(Az, z, a) \leq \{h(d^2(Sz, z, a), 0, d(Sz, z, a).$$
$$d(z, Az, a), 0, 0,)\}^{1/2}$$
$$\leq r^{1/2}(d^2(z, Az, a))$$
$$< d(Az, z, a),$$

और इसीलिए

$$z = Az = Sz = Tz.$$

अतः z प्रतिचित्रणों A, S एवं T का उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है।

अब हम दिखाएंगे कि यह स्थिर बिंदु अद्वितीय है। मान लें X में एक अन्य बिंदु z_1 का अस्तित्व ऐसा है कि

$$z_1 = Az_1 = Sz_1 = Tz_1.$$

तब
$$d^2(z, z_1, a) = d^2(Az, Az_1, a)$$
$$\leq h(d^2(Sz, Tz_1, a), d(Sz, Az, a). d(Tz, Az_1, a),$$
$$d(Sz, Az_1, a). d(Tz_1, Az, a), d(Sz_1, Az_1, a).$$
$$d(Tz_1, Az, a), d(Sz, Az_1, a). d(Tz_1, Az_1, a))$$
$$\leq h(d^2(z, z_1, a), 0, d^2(z, z_1, a), 0, 0)$$
$$\leq r(d^2(z, z_1, a))$$
$$< d^2(z, z_1, a)$$

जिससे

$z = z_1$. उपपत्ति पूर्ण हुई।

टिप्पणी. ऊपर के प्रमेय में क्रमविनिमेयता संबंधी प्रतिबंध (5.2.1) के स्थान पर R-दुर्बल क्रमविनिमेयता लिए जाने में केवल उपपत्ति में मामूली संगत परिवर्तन करना होगा।

4A-18 HRD/99

तृतीय अध्याय

मतकोवस्की संकुचन सिद्धांत

प्रस्तुत अध्याय में उन प्रतिचित्रण निकायों के लिए स्थिर एवं संपात समीकरणों के साधन प्राप्त किए गए हैं, जो मतकोवस्की संकुचन सिद्धांत एवं युंक संकुचन प्रमेय का व्यापकीकरण एवं एकीकरण करते हैं। इस अध्याय के दो अनुभाग हैं :

1. प्रारंभिकी
2. परिणाम

1. प्रारंभिकी

बासंसि के व्यापकीकरण के ध्येय से मतकोवस्की [114]-[115] ने 1973 में एक प्रतिचित्रण निकाय के लिए n दूरीक समष्टियों के गुणन पर एक स्थिर बिंदु प्रमेय प्राप्त किया। सर्वप्रथम हम मतकोवस्की के अनुसरण पर आवश्यक संकेतों का उल्लेख कर रहे हैं :

मान लें $\left(c_{ik}^{(0)}\right)$ एक वर्ग आव्यूह है, जहाँ $c_{ik}^{(0)}$, $i, k = 1,\ldots\ldots, n$, वास्तविक संख्याएं हैं। आव्यूहों $\left(c_{ik}^{(0)}\right)$ का अनुक्रम आवर्ततः इस प्रकार पारिभाषित है :

$$(*) \qquad c_{ik}^{(1)} = \begin{cases} a_{ik} \text{ जब } i \neq k \\ 1 - a_{ik} \text{ जब } i = k, \end{cases}$$

$$(**) \qquad c_{ik}^{(t+1)} = \begin{cases} c_{11}^{(t)}\, c_{i+1,\,k+1}^{(t)} + c_{i+1,\,1}^{(t)}\, c_{1,k+1}^{(t)} \text{ जब } i \neq k \\ c_{11}^{(t)}\, c_{i+1,\,k+1}^{(t)} - c_{i+1,\,1}^{(t)}\, c_{1,k+1}^{(t)} \text{ जब } i = k, \end{cases}$$

$i, k = 1,\ldots\ldots, n\text{-}t\text{-}1,\ t = 0, 1,\ldots., n\text{-}2.$

यदि $n = 1$ तो $c_{11}^{(0)} = a_{11}$ पारिभाषित करें।

उल्लेख्य है कि $\left(c_{ik}^{(t)}\right)$ एक $(n\text{-}t) \times (n\text{-}t)$ वर्ग आव्यूह है। निम्नलिखित प्रमेयिका वस्तुतः मतकोवस्की द्वारा प्रदत्त है (साथ ही देखें [31], [176])।

प्रमेयिका 1.1. मान लें $c_{ik}^{(t)} > 0$, $i, k = 1,\ldots., n$. तब असमिका निकाय

(1.1.1) $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} r_k < r_i$, $i = 1,\ldots\ldots, n$, का एक धनात्मक साधन $r_i > 0$, $i = 1,\ldots., n$, होगा यदि और केवल यदि निम्नलिखित असमिकाएं संतुष्ट हों :

(1.1.2) $c_{ii}^{(t)} > 0$, $i = 1,\ldots., n - t$, $t = 1,\ldots., n - 1$; $n \geq 2$.

मान लें (1.1.1) में पारिभाषित असमिका का r_i, $i = 1,\ldots., n$, एक साधन है तथा

(1.1.3) $h = \text{अधिकतम}_i \left(r_i^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} r_k \right)$

असमिकाओं (1.1.1) की समांगता के आलोक में (1.1.3) सत्य है और $h \in (0, 1)$. मान लें b एवं c ऐसी ऋणेतर संख्याएं हैं कि

(1.1.4) $0 \leq 2b + 2c < 1\text{-}h$.

सुविधा के लिए मान लें $(v_1, v_2,\ldots v_n) = v(1, n)$, $(v_{i1}, v_{i2},\ldots, v_{in}) = v_i(1, n)$, $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$.

मतकोवस्की प्रमेय [114]-[115]

प्रमेय 1.2. मान लें (X_i, d_i), $i = 1,\ldots., n$, पूर्ण दूरीक समष्टियां हैं तथा $T_i : X \to X_i$, $i = 1,\ldots\ldots, n$. यदि a_{ik}, $i,k = 1,\ldots\ldots, n$, का अस्तित्व इस प्रकार हो कि X_k के सभी अवयवों x_k, y_k, $k = 1,\ldots\ldots, n$, के लिए

(1.2.1) $d_i(T_i(x(1, n)), T_i(y(1, n))) \leq \sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_k(x_k, y_k)$ और

$c_{ii}^{(t)} > 0$, $i = 1,\ldots\ldots, n\text{-}t$, $t = 0,\ldots\ldots, n\text{-}1$, संतुष्ट हों तब समीकरण निकाय

(1.2.2) $x_i = T_i(x(1, n))$, $i = 1,\ldots\ldots, n$,

का एक अद्‌वितीय साधन $x_1,\ldots., x_n$ होगा, जहाँ $x_i \in X_i$,

$i = 1,\ldots., n$, तथा स्वेच्छ स्थिर $x_i^0 \in x_i$, $i = 1,\ldots\ldots, n$, के लिए उत्तरोत्तर पुनरावृत्तियों के अनुक्रम

(1.2.3) $x_i^{m+1} = T_i(x^m(1, n))$, $m = 0, 1,\ldots.,$

$i = 1,\ldots\ldots, n$, अभिसरित होते हैं और

(1.2.4) $x_i =$ सीमा m $x_i^m, i = 1, \ldots, n$.

उक्त प्रमेय मतकोवस्की संकुचन सिद्धांत (*मसंसि*) के नाम से जाना जाता है (देखें, [176]) एवं (1.2.1) को मतकोवस्की संकुचन प्रतिबंध कहा जाता है।

जरविक [31] ने बहुमानी प्रतिचित्रण निकायों के लिए *मसंसि* का विस्तारण एवं व्यापकीकरण किया जो अन्य परिणामों के साथ बहुमानी प्रतिचित्रणों के लिए नाडलर [119] के संकुचन सिद्धांत को भी अंतर्निहित करता है। मतकोवस्की उपपत्ति तकनीक का अनुसरण करते हुए जरविक [32] एवं रेड्डी-सुब्रमण्यम् [142] ने क्रमशः एडेलस्टिन [44] एवं क्रासनोसेलस्की [100] के स्थिर बिंदु प्रमेयों को दो प्रतिचित्रण निकायों के लिए सिद्ध किया। उल्लेख्य है कि मतकोवस्की प्रकार के स्थिर बिंदु प्रमेय फलनक समीकरणों के साधनों के लिए उपयोगी हैं।

दूरीक समष्टियों के कार्तीय गुणन पर प्रतिचित्रण निकायों हेतु कोमिनेक [99] के संपात प्रमेय, सिंह-कुलश्रेष्ठ [176] के स्थिर बिंदु प्रमेय, *मसंसि* तथा आईसेकी-शर्मा-शर्मा (देखें [78] व [82]) आदि के 2-दूरीक समष्टि में परिवर्त प्राप्त करना ही आगामी अनुभाग का प्रमुख उद्देश्य है। वस्तुतः 2-दूरीक समष्टि पर मतकोवस्की प्रकार के संकुचन प्रतिचित्रणों के अध्ययन का यह प्रथम प्रयास है।

2. परिणाम

प्रमेय 2.1. मान लें $(X_i, d_i), i = 1, \ldots, n$, पूर्ण 2-दूरीक समष्टियाँ हैं तथा a_{ik}, $b, c \ge 0$ $(i, k = 1, \ldots, n)$ प्रतिबंधों (*), (**), (1.1.1), (1.1.3) एवं (1.1.4) द्वारा परिभाषित हैं। मान लें प्रतिचित्रण निकाय P_i एवं $Q_i : X \to X_i, i = 1, \ldots, n$, संकुचन शर्तो

(2.1.1) $$d_i(P_i(x(1, n)), Q_i(y(1, n)), p_i)$$
$$\le \sum_{K=1}^{n} a_{ik} d_k(x_k, y_k, p_k)$$
$$+ b[d_i(x_i, P_i(x(1, n)), p_i) + d_i(y_i, Q_i(y(1, n)), p_i)]$$
$$+ c[d_i(x_i, Q_i(y(1, n)), p_i) + d_i(P(x(1, n)), y_i, p_i)];$$

को सभी $(x(1, n), y(1, n), p_i) \in X_i \times X_i \times X_i$ के लिए संतुष्ट करते हैं। तब X_i में ऐसे बिंदुओं $x_i, i = 1, \ldots, n$, का ऐसा अस्तित्व होता है कि

$$P_i(x(1, n)) = x_i = Q_i\,(x(1, n)).$$

उपपत्ति. प्रमेयिका 1.1 एवं (1.1.3) से धनात्मक संख्याएं $r_1, r_2, \ldots, r_n$ इस प्रकार छाँट सकते हैं कि

$$\sum_{K=1}^{n} a_{ik} \le h r_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

X_i में स्वेच्छ $x_i^0, i = 1, \ldots, n$, के लिए अनुक्रम $\{x_i^m\}$ निम्न प्रकार परिभाषित करें :

$x_i^{2m+1} = P_i(x^{2m}(1, n))$ एवं $x_i^{2m+2} = Q_i(x^{2m+1}(1, n)), m = 0, 1, 2, \ldots$ चूँकि हम मान सकते हैं कि $d_i(x_i^0. x_i^1, p_i) \le r_i, i = 1, \ldots, n$; इसीलिए (2.1.1) द्वारा

$$d_i(x_i^1, x_i^2, p_i) = d_i(P_i(x^0(1, n)), Q_i(x^1(1, n)), p_i)$$
$$\le \sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_k\left(x_k^0, x_k^1, p_k\right)$$
$$+ b\left[d_i\left(x_i^0, P_i\left(x^0(1,n)\right), p_i\right) + d_i\left(x_i^1, Q_i\left(x^1(1,n)\right), p_i\right)\right]$$
$$+ c\left[d_i\left(x_i^1, p_i\left(x^0(1,n)\right), p_i\right) + d_i\left(x_i^0, Q_i\left(x^1(1,n)\right), p_i\right)\right]$$

अर्थात्

(2.1.3) $$d_i\left(x_i^1, x_i^2, p_i\right)$$
$$\le \sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_k\left(x_k^0, x_k^1, p_k\right)$$
$$+ b\left[d_i\left(x_i^0, x_i^1, p_i\right) + d_i\left(x_i^1, x_i^2, p_i\right)\right]$$
$$+ c\left[d_i\left(x_i^1, x_i^1, p_i\right) + d_i\left(x_i^0, x_i^2, p_i\right)\right]$$
$$\le \sum_{k=1}^{n} a_{ik} r_k + b\left[r_i + d_i\left(x_i^1, x_i^2, p_i\right)\right]$$
$$+ c\left[r_i + d_i\left(x_i^1, x_i^2, p_i\right) + d_i\left(x_i^0, x_i^1, x_i^2\right)\right];$$

(चूँकि 2-दूरीक d_i त्रिभुजीय असमिका को संतुष्ट करता है)।

अब यदि $d_i\left(x_i^0, x_i^1, x_i^2\right) > 0$, तब (2.1.3) में $p_i = x_i^0$ रखने पर

$(1-b)\ d_i\left(x_i^0, x_i^1, x_i^2\right) \le 0$

अर्थात् $d_i\left(x_i^0, x_i^1, x_i^2\right) = 0,\ i = 1, \ldots, n.$

अस्तु (2.1.3) द्वारा

$$d_i\left(x_i^1, x_i^2, p_i\right) \le qr_i,\ \text{जहाँ}\ q = (h + b + c)/(1 - b - c).$$

इसी प्रकार $d_i\left(x_i^2, x_i^3, p_i\right) \le q^2 r_i$.

आगमनतः

$$d_i\left(x_i^m, x_i^{m+1}, p_i\right) \le q^m r_i,\ \text{जहाँ}\ m = 1, 2, \ldots$$

अतः $\left\{x_i^m\right\}$, $i = 1, \ldots n$, कोशी अनुक्रम है अर्थात् X_i के प्रत्येक p_i हेतु $d_i\left(x_i^m, x_i^t, p_i\right)$ $\to 0$ जैसे ही $m, t \to \infty$. चूँकि समष्टियों की पूर्णता के कारण प्रत्येक $\left\{x_i^m\right\}$ का X_i में एक सीमा बिंदु होगा और इसे u_i मान लें, $i = 1, 2, \ldots, n$.

अब त्रिभुजीय असमिका से

$$\begin{aligned}
d_i\left(u_i, p_i\left(u(1,n)\right), p_i\right) &\le d_i\left(u_i, x_i^{2m+2}, p_i\right) \\
&+ d_i\left(p_i\left(u(1,n)\right), Q_i, x_i^{2m+1}, (1,n), p_i\right) \\
&+ d_i\left(u_i, p_i\left(u(1,n)\right), x_i^{2m+2}\right) \\
&\le d_i\left(u_i, x_i^{2m+2}, p_i\right) + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_k\left(x_k^{2m+1}, u_k, p_k\right) \\
&+ b\left[\left(d_i\left(u_i, P\left(u(1, n)\right)\right), p_i\right) + d_i\left(x_i^{2m+1}, x_i^{2m+2}, p_i\right)\right] \\
&+ c\left[d_i\left(x_i^{2m+1}, P_i\left(u(1,n)\right), p_i\right) + d_i\left(u_i, x_i^{2m+2}, p_i\right)\right]
\end{aligned}$$

और जैसे ही $m \to \infty$

$(1 - b - c)\ (d_i\ (u_i, P_i(u(1, n)), p_i) \le 0$ प्राप्त होता है, जिससे $u_i = P_i(u(1, n))$, $i = 1, \ldots, n$. इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है कि $v_i = Q_i(u(1, n))$, $i = 1, \ldots, n$.

अस्तु u_i समीकरणों $P_i\ (x(1, n)) = Q_i(x(1, n)) = x_i$, $i = 1, \ldots, n$, का एक साधन है। यह साधन अद्वितीय है क्योंकि यदि $\bar{u}_i$ दूसरा संभावित साधन हो तो, चूँकि हम मान सकते हैं कि $d_i\ (u_i, \bar{u}_i, p_i) \le r_i$, $i = 1, \ldots, n$; (2.1.1) से

$$\begin{aligned}
d_i\left(u_i, \bar{u}_i, p_i\right) &= d_i\left(P_i\left(u(1,n), Q_i\left(\bar{u}(1, n), p_i\right)\right.\right. \\
&\le \sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_k\left(u_k, \bar{u}_k, p_k\right) + b\left[d_i\left(u_i, P_i\left(u(1,n)\right), p_i\right)\right] \\
&+ d_i\left(\bar{u}_i, Q_i\left(\bar{u}(1, n)\right), p_i\right)\Big] + c\left[d_i\left(\bar{u}_i, P_i\left(u(1,n)\right), p_i\right)\right] \\
&+ d_i\left(u_i, Q_i\left(\bar{u}(1, n)\right), p_i\right)\Big] = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_k\left(u_k, \bar{u}_k, p_k\right) \\
&+ 2c d_i\left(u_i, \bar{u}_i, p_i\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} r_k + 2c r_i \le (h + 2c) r_i.
\end{aligned}$$

आगमनतः किसी धन पूर्णांक m के लिए

$$d_i(u_i, \bar{u}_i, p_i) \le (h + 2c)^m r_i.$$

इससे X_i के प्रत्येक p_i के लिए $d_i(u_i, \bar{u}_i, p_i) = 0$ प्राप्त होता है। क्योंकि $0 \le h + 2c < 1$, अस्तु $u_i = \bar{u}_i$, $i = 1, \ldots, n$. उपपत्ति पूर्ण हुई।

टिप्पणी. उपर्युक्त प्रमेय में $b = c = 0$, $P_i = Q_i$, $i = 1, \ldots, n$, लें तो मतकोवस्की प्रमेय (देखें प्रमेय 1.2) का 2-दूरीक परिवर्त प्राप्त होता है।

टिप्पणी. उपर्युक्त प्रमेय में $b = c = 0$, $P_i = Q_i$, $i = 1$ लें तो आईसेकी [78], आईसेकी-शर्मा-शर्मा [82] से बेहतर परिणाम प्राप्त होते हैं।

टिप्पणी. उपर्युक्त प्रमेय में यदि $c = 0$ लें तो दो प्रतिचित्रण निकायों के लिए सिंह-कुलश्रेष्ठ [176] प्रमेय का 2-दूरीक समष्टि में विस्तारण प्राप्त होता है।

प्रमेय 2.2. मान लें $A_1, A_2, \ldots, A_n$ स्वेच्छ अरिक्त समुच्चय हैं एवं $X_1, X_2, \ldots, X_n$ क्रमशः d_i, $i = 1, \ldots, n$, 2-दूरीक के साथ 2-दूरीक समष्टियां हैं तथा a_{ik}, $b, c \geq 0$ $(i, k = 1, \ldots, n)$ प्रतिबंधों (*), (**), (1.1.1), (1.1.3) एवं (1.1.4) द्वारा परिभाषित हैं। यदि प्रतिचित्रण निकाय P_i एवं $S_i : A \to X_i$, $i = 1, \ldots, n$, शर्त (2.2.1) को संतुष्ट करते हों, $P_i(A) \subset S_i(A)$, $S_i(A)$ $(\subset X_i)$ पूर्ण उपसमष्टियाँ हों, $i = 1, \ldots, n$, तथा

(2.2.1) $$d_i(P_i(x(1, n)), P_i(y(1, n)), p_i)$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_k\left(S_k\left(x(1,n), S_k\left(y(1,n), p_k\right) + b[d_i\left(S_i(x(1,n)),\right.\right.\right.$$
$$P_i(x(1, n)), p_i) + d_i(S_i(y(1, n)), P_i(y(1, n)), p_i)]$$
$$+ c[d_i(S_i(x(1, n)), P_i(y(1, n)), p_i) + d_i(S_i(y(1, n)),$$
$$P_i(x(1, n)), p_i)];$$

जहां सभी $(x(1, n), y(1, n), p_i)$ कार्तीय गुणन $A \times A \times X_i$ के सदस्य हैं; तब समीकरण निकाय $P_i(x(1, n)) = Q_i(y(1, n))$, $i = 1, \ldots, n$, के A में साधन प्राप्त होते हैं।

उपपत्ति. प्रमेय 2.1 के समान धनात्मक संख्याएं $r_1, r_2, \ldots, r_n$ इस प्रकार प्राप्त की जा सकती हैं कि

$$a_{ik} r_k < h r_i, \; i = 1, \ldots, n.$$

चूंकि $P_i(A) \subset S_i(A)$, इसीलिए A_i में स्वेच्छ x_i के लिए A_i में $\{x_i^m\}$ एवं $S_i(A)$ में $\{z_i^m\}$ अनुक्रमों की रचना इस प्रकार की जा सकती है :

$$P_i\left(x^{2m}(1,n)\right) = S_i\left(x^{2m+1}(1, n)\right) = z_i^{2m+1}$$

एवं

$$P_i\left(x^{2m+1}(1,n)\right) = S_i\left(x^{2m+2}(1, n)\right) = z_i^{2m+2}, \; m = 0, 1, 2, \ldots$$

चूँकि हम मान सकते हैं कि

$$d_i\left(z_i^1, z_i^2, p_i\right) \leq r_i, \; r_i \geq 1, \; i = 1, \ldots, n.$$

तब (2.2.1) से

(2.2.2) $$d_i\left(z_i^2, z_i^3, p_i\right) = d_i\left(P_i\left(x^1(1,n)\right), P_i\left(x^2(1,n), p_i\right)\right.$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_k\left(z_k^1, z_k^2, p_k\right)$$
$$+ b\left[d_i\left(z_i^1, z_i^2, p_i\right) + d_i\left(z_i^2, z_i^3, p_i\right)\right]$$
$$+ c[d_i\left(z_i^1, z_i^3, p_i\right) + d_i\left(z_i^2, z_i^3, p_i\right)]$$

(2.2.3) $$d_i\left(z_i^2, z_i^3, p_i\right) \leq \sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_k\left(z_k^1, z_k^2, p_k\right)$$
$$+ b\left[d_i\left(z_i^1, z_i^2, p_i\right) + d_i\left(z_i^2, z_i^3, p_i\right)\right] + c\left[d_i\left(z_i^1, z_i^2, p_i\right)\right.$$
$$+ \left. d_i\left(z_i^2, z_i^3, p_i\right) + d_i\left(z_i^1, z_i^2, z_i^3\right)\right]$$

(चँकि 2-दूरीक d_i त्रिभुजीय असमिका को संतुष्ट करते हैं).

यदि $d_i\left(z_i^1, z_i^2, z_i^3\right) > 0$. तो (2.2.2) में $p_i = z_i^1$ रखने पर

$$d_i\left(z_i^1, z_i^2, z_i^3\right) \leq b \; d_i\left(z_i^1, z_i^2, z_i^3\right)$$

जिससे

$$d_i\left(z_i^1, z_i^2, z_i^3\right) = 0, \text{ क्योंकि } b < 1:$$

अस्तु (2.2.3) से

$$d_i\left(z_i^2, z_i^3, p_i\right) \leq (h + b + c)/(1 - b - c) \; r_i = q r_i,$$

जहाँ $q = (h+b+c)/(1-b-c)$.

इसी तरह

$$d_i\left(z_i^3, z_i^4, p_i\right) \leq q^2 r_i.$$

आगमनतः

$$d_i\left(z_i^{2m+1}, z_i^{2m+2}, p_i\right) \le q^m r_i, m = 1, 2....$$

अतः $\left\{z_i^m\right\}$, $i = 1, ..., n$, कोशी अनुक्रम हैं। चूंकि समष्टि X_i, $i = 1,.......,$ n, के प्रत्येक उप-समुच्चय पूर्ण हैं इसलिए $\left\{z_i^m\right\}$, की $S_i(A)$, $i = 1,........, n$, में सीमा होगी, जिसे u_i, $i = 1,......., n$, कह सकते हैं। अब मान लें $S^{-1}u_i$, $i = 1,......, n$, में $v_i(1, n)$ एक बिंदु है। तब $S_i(v_i(1, n)) = u_i$.

अब (2.2.1) से

$$\begin{aligned}
&d_i(S_i(v_i(1, n)), P_i(v_i(1, n)), p_i) \\
&\le d_i(S_i(v_i(1, n)), P_i(x^{2m+2}(1, n)), p_i) + d_i(P_i(v_i(1, n)), \\
&P_i(x^{2m+2}(1, n)), p_i) + d_i(S_i(v_i(1, n)), P_i(v_i(1, n)), P_i\left(x^{2m+2}(1,n)\right) \\
&\le d_i\left(S_i\left(v_i(1,n)\right), z_i^{2m+3}, p_i\right) \\
&+\sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_k\left(S_k\left(v_k(1,n)\right), z_k^{2m+2}, p_k\right) + b\left[d_i\left(S_i\left(v_i(1,n)\right),\right)\right. \\
&\left. P_i\left(v_i(1, n)\right), p_i) + d_i\left(z_i^{2m+2}, z_i^{2m+3}, p_i\right)\right] \\
&+c\left[d_i\left(S_i\left(v_i(1, n)\right), z_i^{2m+3}, p_i\right)\right] \\
&+d_i\left(z_i^{2m+2}, P_i\left(v_i(1, n)\right), p_i\right)] \\
&+d_i\left(S_i\left(v_i(1, n)\right), P_i\left(v_i(1, n), z_i^{2m+3}\right)\right),
\end{aligned}$$

m का सीमांत मान लेने पर

$$\begin{aligned}
&(1\text{-}c)\, d_i(S_i(v_i(1, n)), P_i(v_i(1, n)), p_i) \\
&\le b d_i(S_i(v_i(1, n)), P_i(v_i(1, n)), p_i).
\end{aligned}$$

अतः

$$S_i(v_i(1, n)) = P_i(v_i(1, n), i = 1, 2,......., n.$$

टिप्पणी. उपर्युक्त प्रमेय 2.2 में $b = c = 0$, $A_i = X_i$ एवं $S_i(x(1, n)) = x_i$ (जहां प्रत्येक $x_i \in A_i$, $i = 1,...., n$) लिया जाए तब प्रमेय 1.2 का 2-दूरीक समष्टि में विस्तार प्राप्त होता है और यदि $i = 1$ लें तो आईसेकी-शर्मा-शर्मा [78], [82] से बेहतर परिणाम प्राप्त होते हैं।

टिप्पणी. कोमिनेक का संपात प्रमेय [99, प्रमेय 1] जो कि गोबेल [64] के संपात प्रमेय एवं *मसंसि* का व्यापकीकरण है, उपर्युक्त प्रमेय 2.2 में $b = c = 0$ लेने पर प्राप्त किया जा सकता है।

टिप्पणी. उपर्युक्त प्रमेय 2.2 में $b = c = 0$, $A_i = X_i$, $i = 1$ लेने पर युंक प्रमेय [87] का संपाती भाग प्राप्त होता है।

पिकार्ड पुनरावृत्तिकों का प्रयोग करते हुए किसी स्थिर बिंदु समीकरण ($Tx = x$, जहाँ $T : M \to M$) के संख्यात्मक साधन में पुनरावृत्तिकों के स्थायित्व की समस्या का दूरीक समष्टि पर बानाख़ संकुचन प्रतिचित्रणों हेतु अध्ययन सर्वप्रथम जर्मन गणितज्ञ प्रोफेसर ए०एम० आस्त्रोवस्की ने 1967 में किया; देखें [85], [207], [236]. तत्पश्चात्, दो दशक बाद, सुश्री ए०एम० हार्डर एवं उनके शोध निदेशक प्रोफेसर टी०एल० हिक्स ने दूरीक समष्टि पर बानाख़ संकुचन प्रतिचित्रणों से अधिक व्यापक प्रतिचित्रणों हेतु अध्ययन किया है; देखें [207], [228]-[229]. हाल ही में *मसंसि* के कई अन्य व्यापकीकरण हुए हैं (यथा देखें [205]-[206], [214], [222]), किंतु *मसंसि* में प्रयुक्त प्रतिबंधों के अंतर्गत गुणन समष्टि पर पिकार्ड पुनरावृत्तिकों के स्थायित्व के अध्ययन का श्रीगणेश 1994 में हुआ है (देखें [236]). 2-दूरीक समष्टि (या इसके परिवर्तों) पर पुनरावृत्तिकों के स्थायित्व के अध्ययन का समारंभ होना अभी शेष है।

चतुर्थ अध्याय

2-बानाख़ समष्टि में स्थिर बिंदु प्रमेय

इस अध्याय में 2-बानाख़ समष्टि के संवृत अवमुख उपसमुच्चयों पर परिभाषित क्रमविनिमेयी प्रतिचित्रणों के स्थिर बिंदु के अस्तित्व का अध्ययन किया गया है। इस अध्याय के अनुभाग हैं :

1. प्रारंभिकी
2. परिणाम

1. प्रारंभिकी

प्रोफेसर कियोशी आईसेकी [79]-[81] ने सर्वप्रथम 2-मानकित समष्टि पर परिभाषित अविस्तारी प्रतिचित्रणों (यदि 2-मानकित समष्टि $(X, \|., \|)$ का K एक अवमुख समुच्चय हो तो प्रतिचित्रण $T:K\to X$ को अविस्तारी कहा जाएगा यदि K में प्रत्येक x, y एवं X के प्रत्येक z के लिए $\| Tx - Ty, z \| \leq \| x - y, z \|$) के लिए स्थिर बिंदुओं का अध्ययन किया। इसके बाद 2-मानकित एवं 2-बानाख़ समष्टियों में कई स्थिर बिंदु प्रमेय स्थापित किए गए। उदाहरणार्थ देखें ([21], [38]-[39], [63] व [162])।

हाल ही में पाठक [138] ने बानाख़ समष्टि X के (अरिक्त) अवमुख संवृत उपसमुच्चय M पर परिभाषित ऐसे क्रमविनिमेयी स्व-प्रतिचित्रणों F एवं G का अध्ययन किया जो M के प्रत्येक x, y एवं $q \in (0, 1)$ के लिए निम्नलिखित संकुचन शर्त को संतुष्ट करते हैं :

(*) $\|Fx - Fy\|^2$

q अधिकतम $\{\|Gx - Fx\| \, \|Gy - Fy\|, \|Gx - Fy\| \, \|Gy - Fx\|, \|Gx - Fx\| \, \|Gy - Fx\|, \|Gx - Fy\| \, \|Gy - Fy\|\}$.

प्रस्तुत अध्याय में हम प्रतिचित्रण प्रतिबंध (*) का अध्ययन 2-बानाख़ समष्टि में कर रहे हैं।

2. परिणाम

प्रमेय 2.1. मान लें $(B, \|., .\|)$ एक 2-बानाख़ समष्टि है तथा M समष्टि B का संवृत अवमुख उपसमुच्चय है। मान लें प्रतिचित्रण F व $G : M\to M$ ऐसे हैं कि

(2.1.1) $FG = GF$;

(2.1.2) $F^2 = G^2 = I$, जहां I तत्समक प्रतिचित्रण है;

M के प्रत्येक x, y, a के लिए (0, 1) में एक ऐसे नियतांक q का अस्तित्व है कि–

(2.1.3) $\|Fx - Fy, a\|^2$

$\leq q$ अधिकतम $\{\|Gx - Fx, a\|\ \|Gy - Fy, a\|,\ \|Gx - Fy, a\|\ \|Gy - Fx, a\|,\ \|Gx - Fx, a\|\ \|Gy - Fx, a\|,\ \|Gx - Fy, a\|\ \|Gy - Fy, a\|\}$;

M के किसी बिंदु x_1 के लिए एक अनुक्रम $\{Gx_n\}$ निम्नवत् पारिभाषित है :

(2.1.4) $Gx_{n+1} = (1 - t)\, Gx_n + tFx_n,\ 0 < t < 1,\ n \geq 1;$

तब अनुक्रम $\{Gx_n\}$ के उपसमुच्चय M के किसी बिंदु u पर अभिसरित होने पर प्रतिचित्रणों F व G का एक अद्‌वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु होता है।

उपपत्ति. प्रत्येक $n \geq 1$ के लिए (2.1.4) से

(2.1.5) $\|Gx_{n+1} - FGu, a\|^2$

$\leq [(1 - t)\, \|Gx_n - FGu, a\| + t\|Fx_n - FGu, a\|]^2$

$\leq (1 - t)^2\, \|Gx_n - FGu, a\|^2 + 2t(1 - t) \times$

$\|Gx_n - FGu, a\|\ \|Fx_n - FGu, a\| + t^2\|Fx_n - FGu, a\|^2.$

(2.1.2) से

(2.1.6) $\|Fx_n - FGu, a\|^2$

$\leq q$ अधिकतम $\{\|Gx_n - Fx_n, a\|\ \|G^2u - FGu, a\|,$

$\|Gx_n - FGu, a\|\ \|G^2u - Fx_n, a\|,$

$\|Gx_n - Fx_n, a\|\ \|G^2u - Fx_n, a\|,$

$\|Gx_n - FGx_n, a\|\ \|G^2u - FGu, a\|\}.$

अब (2.1.2) व (2.1.6) का (2.1.5) में प्रयोग करने पर

(2.1.7) $\|Gx_{n+1} - FGu, a\|^2$

$\leq (1-t)^2\, \|Gx_n - FGu, a\|^2$

$+ 2t(1-t)\, \|Gx_n - FGu, a\|\ [\|Fx_n - Gx_n, a\|$

$+ \|Gx_n - FGu, a\|]$

$+ t^2 q$ अधिकतम $\{\|Gx_n - Fx_n, a\|\ \|u - FGu, a\|,$

$\|Gx_n - FGu, a\|\ [\|u - Gx_n, a\| + \|Gx_n - Fx_n, a\|]$

$+ \|Gx_n - Fx_n, a\|\ [\|u - Gx_n, a\|$

$+ \|Gx_n - Fx_n, a\|]$

$+ \|Gx_n - FGu, a\|\ \|u - FGu, a\|\}.$

चूंकि $\{Gx_n\} \to u$ तथा $Gx_{n+1} - Gx_n = t(Fx_n - Gx_n)$, इसलिए

$\{Fx_n - Gx_n\} \to 0$

तथा (2.1.7) में n का सीमांत मान लेने पर

$\|u - FGu, a\|^2$

$\leq (1 - t)^2\, \|u - FGu, a\|^2 + 2t(1 - t)\, \|u - FGu, a\|^2$

$+ t^2 q$ अधिकतम $\{0, 0, 0, \|u - FGu, a\|^2\}$

$= (1 - t)^2\, \|u - FGu, a\|^2$

$+ 2t(1 - t)\, \|u - FGu, a\|^2 + t^2 q\, \|u - FGu, a\|^2$

$= k\, \|u - FGu, a\|^2,$

जहाँ $k = [1-(1-q)\, t^2] < 1.$

स्पष्ट है कि

$\|u - FGu, a\| = 0$

जो यह दर्शाता है कि u – FGu एवं M के सभी सदस्य रैखिकतः आश्रित हैं, क्योंकि समष्टि में दो या इससे अधिक अवयव हैं, अतः u-FGu एवं a को रैखिकतः आश्रित होने के लिए u-FGu को अवश्य ही शून्य सदिश होना चाहिए। अतः

(2.1.8) $FGu = u$

अब (2.1.2) से

(2.1.9) $Fu = F^2Gu = Gu.$

पुनः (2.1.1), (2.1.2) व (2.1.8) – (2.1.9) से

$\|u - Fu, a\|^2 = \|F(Fu) - Fu, a\|^2$

$\leq q$ अधिकतम $\{0, \|u - Fu, a\|^2, 0, 0\}$

$= q\, \|u - Fu, a\|.$

अब चूँकि $q < 1$, इसलिए $u = Fu$, और (2.1.9) से $u = Gu$, अर्थात् u प्रतिचित्रणों F एवं G का उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है। अब यह दिखाना शेष है कि यह बिंदु अद्‌वितीय है।

मान लें F एवं G का एक अन्य स्थिर बिंदु v भी है। तब

$\|u - v, a\|^2 = \|F^2u - F^2v, a\|^2$

$= \|F(Fu) - F(Fv), a\|^2$

$\leq q$ अधिकतम $\{0, \|u - v, a\|^2, 0, 0\}$

$= q \; \|u - v, a\|^2.$

इसीलिए

$\|u - v, a\| = 0$

जिससे

$v = u.$

पंचम अध्याय

अविस्तारी प्रतिचित्रणों के पुनरावृत्तिकों का अभिसरण

इस अध्याय में 2-मानकित समष्टि में पुनरावृत्तिकों की अभिसरण संबंधी समस्या पर कुछ परिणाम दिए गए हैं। इसके अनुभाग निम्नवत् हैं :

1. प्रारंभिकी
2. परिणाम

1. प्रारंभिकी

ऐसा प्रतीत होता है कि मानकित समष्टि में संकुचन प्रतिचित्रणों का समारंभन प्रोफेसर एम0ए0 क्रासनोसेलस्की [100] की निम्नलिखित प्रमेय से हुआ :

प्रमेय 1.1. मान लें किसी मानकित समष्टि X में K एक अरिक्त पूर्ण अवमुख उपसमुच्चय है तथा P समष्टि X का एक संहत उपसमुच्चय है। मान लें प्रतिचित्रण $T: K \rightarrow P$ संतत है तथा $S: K \rightarrow X$ एक संकुचन प्रतिचित्रण है। यदि K के प्रत्येक x, y के लिए $Tx + Sy \in K$ तो K में एक ऐसा बिंदु u होगा कि $Tu + Su = u$.

तत्पश्चात रोअडेस [145], हिक्स-कुबिसेक [75] तथा कई अन्य गणितज्ञों (देखें उदाहरणार्थ, [131], [139], [147], [149], [203]) ने दिखाया कि मानकित समष्टि के प्रतिचित्रण T के लिए यदि मान पुनरावृत्तिक अनुक्रम बिंदु z पर अभिसरित होता हो तो $Tz = z$, देखें [42]. दूसरी ओर नैम्पली-सिंह [122] तथा नायडू-प्रसाद [121] ने देखा कि T के लिए अभिसारी इशिकावा पुनरावृत्तिक अनुक्रम [94] प्रतिचित्रण T के स्थिर बिंदु पर अभिसरित होता है। हाल ही में क्रासनोसेलस्की [100] की पुनरावृत्तिक विधि का विस्तारण करते हुए कुहफिटिंग [103] ने बहुमानी प्रतिचित्रणों के लिए मान पुनरावृत्तिक विधि का अध्ययन किया। इन सभी परिणामों के आलोक में सिंह [172] ने इशिकावा प्रकार की पुनरावृत्तिक विधि की अवधारणा बहुमानी प्रतिचित्रणों के लिए प्रस्तुत की तथा स्थिर बिंदुओं के सन्निकटन संबंधी परिणाम दिए।

प्रस्तुत अध्याय में हम एकमानी प्रतिचित्रणों के लिए मान पुनरावृत्तिक विधि के अधीन पाठक [139] एवं यूल-शर्मा [203] के परिणामों का विस्तार (देखें क्रमशः प्रमेय 2.1 एवं प्रमेय 2.2) 2-मानकित समष्टि में कर रहे हैं।

2. परिणाम

इस अनुभाग में मान लें (N, ||., .||) 2-मानकित समष्टि है तथा X इसका संवृत अवमुख उपसमुच्चय है जिसमें एक से अधिक अवयव है। हम X पर दो प्रतिचित्रणों के लिए रोअडेस [147] द्वारा अध्ययन किए गए इशिकावा पुनरावृत्तिकों के अभिसरण का अध्ययन कर रहे हैं।

मान लें $T_1, T_2 : X \rightarrow X$, $x_0 \in X$ तथा

$$x_{2n+1} = (1-c_n)\, x_{2n} + c_n T_1 x_{2n},$$

$$x_{2n+2} = (1-c_n)\, x_{2n+1} + c_n T_2 x_{2n+1},\ n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

पुनश्च: (i) $c_0 = 1$ (ii) $c_n \in (0, 1,)$, $n = 1, 2, \ldots,$

(iii) सीमा$_n$ $c_n = h > 0$.

प्रमेय 2.1. मान लें T_1 एवं T_2 समुच्चय X से X पर संतत प्रतिचित्रण हैं तथा पूर्व परिभाषित अनुक्रम $\{x_n\}$ किसी बिंदु z पर अभिसरित होता है। मान लें

$q \in (0, 1]$ तथा X के सभी x, y, a के लिए

$$(2.1.1)\quad \|T_1x - T_2y\ a\| \le q \text{ अधिकतम} \left\{ \|x - y, a\|,\ \frac{\|x - T_1x, a\|\left[1 - \|x - t_2y, a\|\right]}{1 + \|x - T_1x, a\|},\ \frac{\|x - T_2y, a\|\left[1 - \|x - t_1x, a\|\right]}{1 + \|x - T_2y, a\|},\ \frac{\|T_1x - y, a\|\left[1 - \|y - t_2y, a\|\right]}{1 + \|T_1x - y, a\|},\ \frac{\|y - T_2y, a\|\left[1 - \|T_1x - y, a\|\right]}{1 + \|y - T_2y, a\|} \right\}$$

यदि z एक प्रतिचित्रण का स्थिर बिंदु हो तो यह दूसरे का भी स्थिर बिंदु होगा।

उपपत्ति. मान लें X में एक बिंदु z ऐसा है कि सीमा $_n x_n = z$. मान लें $T_1 z = z$. अब हम दिखाते हैं कि $z = T_2 z$. शर्त (2.1.1) द्वारा

$$\|z-T_2z, a\|$$
$$\leq \|z-x_{2n+1}, a\| + \|x_{2n+1}-T_2z, a\|$$
$$\leq \|z-x_{2n+1}, a\| + (1-c_n)\|x_{2n}-T_2z, a\|$$
$$+ c_n \|T_1x_{2n}-T_2z, a\|$$
$$\leq \|z-x_{2n+1}, a\| + (1-c_n)\|x_{2n}-T_2z, a\|$$
$$+ c_n q \text{ अधिकतम } \Bigg\{\|x_{2n}-z, a\|,$$

$$\frac{\|x_{2n}-T_1x_{2n}, a\|\left[1-\|x_{2n}-T_2z, a\|\right]}{1+\|x_{2n}-T_1x_{2n}, a\|},$$

$$\frac{\|x_{2n}-T_2z, a\|\left[1-\|x_{2n}-T_1x_{2n}, a\|\right]}{1+\|x_{2n}-T_2z, a\|},$$

$$\frac{\|T_1x_{2n}-z, a\|\left[1-\|z-T_2z, a\|\right]}{1+\|T_1x_{2n}-z, a\|}$$

$$\frac{\|z-T_2z, a\|\left[1-\|T_1x_{2n}-z, a\|\right]}{1+\|z-T_2z, a\|}\Bigg\}$$

अब चूँकि

$$\|x_{2n}-T_2x_{2n}, a\| = \|x_{2n}-x_{2n+1}, a\|/c_n$$

इसीलिए

$$\|z-T_2z, a\|$$
$$\leq \|z-x_{2n+1}, a\| + (1-c_n)\|x_{2n}-T_2z, a\|$$
$$+ qc_n \text{ अधिकतम } \{\|x_{2n}-z, a\|,$$

$$\frac{\|x_{2n}-x_{2n+1}, a\|/c_n\left[1-\|x_{2n}-T_2z, a\|\right]}{1+\|x_{2n}-x_{2n+1}, a\|/c_n},$$

$$\frac{\|x_{2n}-T_2z, a\|\left[1-\|x_{2n}-x_{2n+1}, a\|/c_n\right]}{1+\|x_{2n}-T_2z, a\|},$$

$$\frac{\|T_1x_{2n}-z, a\|\left[1-\|z-T_2z, a\|\right]}{1+\|T_1x_{2n}-z, a\|},$$

$$\frac{\|z-T_2z, a\|\left[1-\|T_1x_{2n}-z, a\|\right]}{1+\|z-T_2z, a\|}\Bigg\}$$

अब इसमें T_1 के सांतत्य एवं (iii) का प्रयोग करते हुए, n का सीमांत मान लेने पर

$$\|z-T_2z, a\| \leq (1-h)\|z-T_2z, a\| + hq \text{ अधिकतम } \Bigg\{0, 0, \frac{\|z-T_2z, a\|}{1+\|z-T_2z, a\|}, 0, \frac{\|z-T_2z, a\|}{1+\|z-T_2z, a\|}\Bigg\}$$

अर्थात्

$$\|z-T_2z, a\| \leq (1-h)\|z-T_2z, a\| + \frac{hq\|z-T_2z, a\|}{1+\|z-T_2z, a\|}$$

अर्थात्

$$\|z-T_2z, a\| \leq -(1-q)(\|z-T_2z, a\|)$$

जिससे

$\|z-T_2z, a\| = 0$ क्योंकि $0 < q \leq 1$ और a समष्टि X का स्वेच्छ अवयव है। अस्तु $z-T_2z$ एवं a रैखिकतः आश्रित हैं। चूँकि X में दो या इससे अधिक अवयव हैं इसलिए ऐसा केवल तभी संभव है जब $z-T_2z$ एक शून्य सदिश हो। अतः $T_2z = z$.

इसी प्रकार $z = T_2z$ लेने पर $z = T_1z$ प्राप्त किया जा सकता है। उपपत्ति पूर्ण हुई।

प्रमेय 2.2. मान लें T_1 एवं T_2 समुच्चय X से X पर प्रतिचित्रण हैं तथा पूर्व परिभाषित अनुक्रम $\{x_n\}$ किसी बिंदु z पर अभिसरित होता है। यदि $q \in (0, 1]$ तथा X के सभी x, y, a के लिए

(2.2.1) $\|T_1x - T_2y, a\| \leq q$ अधिकतम $\Big\{\|x-y, a\|,$

$$\frac{\|y - T_2y, a\|\left[1+\|x-T_1x, a\|\right]}{1+\|x-y, a\|},$$

$$\left.\frac{\|x - T_2y, a\|\left[1+\|x-T_1x, a\|+\|y-T_1x, a\|\right]}{2\left(1+\|x-y, a\|\right)}\right\};$$

तो z प्रतिचित्रणों T_1 एवं T_2 का उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु होगा।

उपपत्ति. मान लें X में एक बिंदु z ऐसा है कि सीमा$_n$ $x_n = z$. हमें दिखाना है कि

$$T_1z = T_2z = z.$$

त्रिभुजीय असमिका एवं (2.2.1) द्वारा

$$\|z - T_2z, a\|$$

$$\le \|z - x_{2n+1}, a\| + \|(1 - c_n)\, x_{2n} + c_nT_1x_{2n} - T_2z, a\|$$

$$\le \|z - x_{2n+1}, a\| + (1 - c_n)\, \|x_{2n} - T_2z, a\|$$

$$+ c_n \|T_1x_{2n} - T_2z, a\|$$

$$\le \|z - x_{2n+1}, a\| + (1 - c_n)\, \|x_{2n} - T_2z, a\|$$

$$+ c_nq \text{ अधिकतम } \Bigg\{ \|x_{2n} - z, a\|,$$

$$\frac{\|z - T_2z, a\|\left[1+\|x_{2n}-T_1x_{2n}, a\|\right]}{1+\|x_{2n}-z, a\|},$$

$$\left.\frac{\|x_{2n} - T_2z, a\|\left[1+\|x_{2n}-T_1x_{2n}, a\|+\|z-T_1x_{2n}, a\|\right]}{2\left(1+\|x_{2n}-z, a\|\right)}\right\}$$

$$\le \|z - x_{2n+1}, a\| + (1 - c_n)\, \|x_{2n} - T_2z, a\|$$

$$+ c_n \text{ अधिकतम } \Bigg\{ \|x_{2n} - z, a\|,$$

$$\frac{\|z - T_2z, a\|\left[1+\|x_{2n}-x_{2n+1}, a\|/c_n\right]}{1+\|x_{2n}-z, a\|}$$

$$\left.\frac{\|X_{2n} - T_2z, a\|+\left[1+\|x_{2n}-x_{2n+1}, a\|/c_n+\|z-x_{2n}, a\|\right]}{2\left(1+\|x_{2n}-z, a\|\right)}\right\}$$

n का सीमांत मान लेने पर

$$\|z - T_2z, a\| \le (1 - h - hq)\, \|z - T_2z, a\|$$

जिससे

$$\|z - T_2z, a\| = 0$$

और

$$z = T_2z.$$

इसी प्रकार

$$T_1z = z.$$

अतः z प्रतिचित्रणों T_1 एवं T_2 का उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है। □

ABSTRACT

In this book some coincidence and fixed point theorems have been proved on 2-metric and 2-normed spaces under different contractive conditions. Various definitions, examples, results and discussions of this book are divided into the following five chapters :

1. Preliminaries.
2. Fixed point theorems for contractive type mappings on 2-metric spaces.
3. Matkowski contraction principle.
4. Fixed point theorems in 2-Banach spaces.
5. Convergence of sequence of iterates of nonexpansive mappings.

The first chapter is introductory in nature and contains certain topological preliminaries to be used in the sequel. The intent of the second chapter is to give some generalizations of the well known Banach contraction principle on the setting of 2-metric spaces.

With a view to generalizing the Banach contraction principle Matkowski established a fixed point theorem for a system of transformation on a product of n-metric spaces. The third chapter attempts to extend certain generalizations of this principle to 2-metric spaces. It appears that the Matkowski type contraction principles on 2-metric spaces are being studied for the first time.

The Fourth chapter studies the existence of fixed points of a new class of commuting mappings on 2-Banach spaces. It is well known that iterates of nonexpansive mappings need not converge to its fixed point. In the last chapter, we consider a certain class of nonexpansive mappings whose Mann sequence of iterates converges to their fixed points.

संदर्भ-सूची

1. J. Achari and B.K. Lahiri,A fixed point theorem, Riv. Mat. Univ. Parma 43 (1980), 161-165.
2. J. Achari and S.T. Patil, A note on a fixed point theroem in 2-metric space, Math, Edu. (Siwan), 22 (1988), 23-24.
3. D.E. Alspach, A fixed point free nonexpansive map, Proc. Amer. Math. Soc. 82 (1981), 423-424.
4. E. Andalafte and R. Freese, Existence of 2-segments in 2-metric spaces, Fund. Math, LX(1967), 201-208.
5. Dune E. Anderson, Merle D. Guay and K.L. Singh, Fixed and common fixed points in convex metric spaces, Jñānābha 18 (1988), 31-43.
6. N.A. Assad and W.A. Kirk, Fixed point theroems for setvalued mappings of contractive type, Pacific J.Math, 45 (1972), 553-562.
7. J.S. Bae, Studies on generalizad nonexpansive maps, Ph.D. Thesis, Seoul National Univ., 1983.
8. J.B. Baillon, R.E. Bruk and S. Reich, On asymptotic behaviour of nonexpansive mappings and semigroups in Banach spaces, Houston J. Math. 4(1978), 1-9.
9. N. Bajaj, Some maps on unique common fixed points, Indian J. Pure Appl. Math. 15(1984) 843-848.
10. D.K. Basu, On a fixed point theorem in 2-metric space, Pure Math, Manuscript 6 (1987).
11. L.P. Belluce, W.A. Kirk and E.F. Steiner, Normal structures in Banach spaces, Pacific J. Math. 26, (1968), 443-440.
12. F.F. Bonsal, Lectures on some fixed point theorems of functional

analysis, T.I.F.R., Bombay 1962.

13. D. Borsal, Some properties of compactness in a g-2-metric space, Studia Univ. Babes-Bolyai Math. 31 (1986), 27-30.

14. D.W. Boyd and J.S.W. Wong, On nonlinear contractions, Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969), 458-464.

15. F.E. Browder, Nonexpansive nonlinear operators in Banach spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 54 (1965), 1041-1044.

16. A. Carbone and G. Marino, Fixed points and almost fixed points of nonexpansive maps in Banach spaces, Riv. Mat. Univ. Parma 13(1987), 385-393.

17. J. Caristi, Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions, Trans. Amer. Math. Soc. 215 (1976), 241-251.

18. K.P. Chamola, Some contributions to fixed point theory in probabilistic metric spaces, D. Phil. Thesis, (H.N. Bahuguna) Gharwal University, Srinagar, 1989.

19. S.S. Chang, On common fixed point theorems for a family of ϕ-contractions mappings, Math. Japon. 29 (1984), 527-536.

20. S.S. Chang and N.J. Huang, On the generalized 2-metric spaces and probabilistic 2-metric spaces with applications to fixed point theory, Math. Japon. 34(6) (1989), 885-900.

21. Y.J. Cho, Linear mappings on linear 2-normed spaces, D.Phil. Thesis, Pusan National University, Korea, 1984.

22. Y.J. Cho, On existence of fixed points in 2-metric spaces, Pusan Kyo. Math. J. 1(1985), 81-88.

23. Y.J. Cho and R.W. Freese, Characterization of linear 2-normed spaces, Math. Japon. 40(1994), 115-122.

24. Y.J. Cho, M.S. Khan and S.L. Singh, Common fixed points of weakly commuting mappings, Univ. u Novom Sadu, Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat. 18(1) (1988), 129-142.

25. Y.J. Cho and S.L. Singh, A coincidence theorem and fixed point theorems in Saks spaces, Kobe J. Math. 3 (1986), 1-6.

26. K.J. Chung, Common fixed point theorems of two mappings, Comment. Math. Univ. St. Pauli 24 (1975), 97-106.

27. K.J. Chung, Some comnon fixed point theorems, Math. Japon. 23 (1978), 401-408.

28. L.B. Ciric, A generalization of Banach contraction principle, Proc. Amer. Math. Soc. 45 (1974), 267-273.

29. V. Conserva, Common fixed point theorems for commuting maps on a metric space, Publ. Inst. Math. (Beograd) 32 (1982), 37-43.

30. X.X. Cui, An investigation of normpreserving extensions of bounded bilinear functionals on 2-normed spaces and some other problems, Xingiang Univ. Natur. Sci. 5 (1988), 4-10.

31. S. Czerwik, A fixed point theorem for a system of multivalued transformations, Proc. Amer. Math. Soc. 55 (1976), 136-139.

32. S. Czerwik, A generalization of Edelstien fixed point theorem, Demonst. Math. 9(2) (1976), 281-285.

33. K.M. Das and K.V. Naik, Common fixed point theorems for commuting maps on a metric space, Proc. Amer. Math. Soc. 77 (1979), 369-373.

34. C. Diminnie, S. Gähler and A. White Jr., 2-Inner product spaces, Demonst. Math. 6 (1973), 525-536.

35. C. Diminnie, S. Gähler and A. White, Jr., Strictly convex linear 2-normed spaces, Math. Nachr. 59 (1974), 319-324.

36. C. Diminnie, S. Gähler and A. Whire, Jr., 2-Inner product spaces II, Demonst. Math. 10 (1977), 169-188.

37. C. Diminnie and S. Gähler and A. White, Jr., Remarks on strictly convex and strictly 2-convex 2-normed spaces, Math. Nachr. 88 (1979), 363-372.

38. C. Diminnie and A. White Jr., Nonexpansive mappings in 2-normed spaces, Math. Japon. 21 (1976), 197-200.

39. C. Diminnie and A. White Jr., Some geometric remarks concerning strictly 2-convex 2-normed spaces, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 6 (1978), 245-253.

40. M.L. Diviccaro, B. Fisher and S.Sessa, Common fiexed point theorems with a rational inequality, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 14 (1986), 277-285.

41. M.L. Diviccaro and S.Sessa, Some remarks on common fixed points of four mappings, Jñānābha, 15 (1985), 139-149.

42. W.G. Dotson, Jr., On the Mann iterative process, Trans. Amer.Math. Soc. 149 (1970), 65-73.

43. J. Dugundj and A. Granas, Fixed point theory, Vol. 1, Monograf. Math. No. 61, Warszawa, 1982.

44. M. Edelstein, On fixed and periodic points under contractive mappings, J. London Math. Soc. 37 (1962), 74-79.

45. E. Faddel and G. Fourier (Ed.), Fixed point theory, Lect. Notes Math. 886, Springer-Verlag, 1981.

46. D.G. de Figueiredo, Topics in nonlinear functional analysis, Lect. Notes Univ. Maryland, 1967.

47. B. Fisher, Results on common fixed points, Math. Japon. 22 (1977), 335-338.

48. B. Fisher, Common fixed points and constant mappings on metric spaces. Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 5 (1977), 319-326.

49. B. Fisher, Common fixed points and constant mappings satisfying a rational inequality, Math, Sem, Notes Kobe Univ. (1978), 29-35.

50. B. Fisher, Mappings with a common fixed point, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 7 (1978), 81-84.

51. B. Fisher, Common fixed points of commuting mappings, Bull. Inst. Math. Acad. Sincia 9 (1981), 399-406.

52. B. Fisher, Common fixed points of four mappings, Bull Inst. Math, Acad. Sinica. 11 (1983), 103-113.

53. B. Fisher and M.S.Khan, Fixed points, common fixed points and constant mappings, Studia Sci. Math. Hungri. 11 (1978), 467-470.

54. B. Fisher and S.Sessa, Some remarks on a fixed point theorem of T. Kubiak, Math. Publ. (Debrecen) 37 (1990), 41-45.

55. I. Franic, Two results in 2-normed spaces, Glasnik Mat. 17 (37) (1982), 271-275.

56. R. Freese, A 2-metric characterization of Euclidean plane, Math. Ann. 206 (1973), 285-294.

57. उमेश चन्द्र गैरोला, दूरीक एवं बानाख समष्टियों में संपात, स्थिर एवं संकर स्थिर बिंदुओं का अस्तित्व, पी-एच0डी0 शोध प्रबंध, गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय, हरिद्वार, अगस्त 1990.

58. S. Gähler, 2-metrische Räume und ihre topoliogische struktur,. Math. Nachr. 26 (1963), 115-148.

59. S. Gähler, Lineare 2-normierte Räume, Math. Nachr. 28 (1964), 1-43.

60. S. Gähler, Uber eine Zwischenrelation in 2-metrischen Räumen, Math.Nachr 29 (1965), 301-331.

61. S. Gähler, Uber 2-Banach Räume, Math. Nachr. 42 (1969), 335-347.

62. A. Ganguly, On an extension of Iseki's fixed point theorem, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 10 (1982) 675-676.

63. A. Ganguly, Fixed point theorems on 2-Banach spaces, J. Indian Acad. Math. 4 (1982), 80-81.

64. K.Goebel, A Coincidence theorem, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math., Astronom. Phys. 16 (1968), 733-735.

65. K. Goebel W.A. Kirk and T.N. Shimi, A fixed point theorem in uniformly convex spaces, Boll, Un. Mat. Ital. 7 (1973), 67-75.

66. K. Goebel and T.Kuczumow, A contribution to the theory of nonexpansive mappings, Bull. Cal. Math. Soc. 70 (1978), 355-357.

67. K. Goebel and S. Reich, Uniform convexity, hyperbolic geometry and nonexpansive mappings, Marcel-Dekker, New York, 1984.

68. D. Göhde, Zum prinzip der Konstaktiven Abbildung, Math. Nachr. 30 (1965), 251-258.

69. K.E. Grant, A 2-metric lattice structure, D.Phil. Thesis, Saint Louis University, 1968.

70. Merl D.Guay, K.L. Singh and J.H.M. Whitfield, Fixed points for multivalued mappings in locally convex spaces, Jñānābha 18 (1978), 45-54.

71. O. Hadzic, Foundations of fixed point theory, Institute za Mathematika, Novi Sad, 1978.

72. O. Hadzic, Fixed point theory in topological vector spaces, Univ. Novi Sad, 1984.

73. O. Hadzic, Common fixed point theorems for family of mappings in complete metric spaces. Math. Japon, 29 (1984), 127-134.

74. T. L. Hicks, Some fixed point theorems, Radovi Mat. 5(1989), 115-119.

75. T. L. Hicks and J. D. Kubicek, On Mann iteration process in Hilbert spaces, J. Math. Anal, Appl. 64 (1978), 562-569.

76. C. Hsiao, A property of contractive type mappings in 2-metric spaces, Jñānābha 16 (1986), 223-239.

77. K. Iseki, Fixed point theorems in Banach spaces, Math. Sem. Notes. Kobe Univ.2 (1974), 11-18.

78. K. Iseki, Fixed point theorems in 2-metric spaces, Math. Sem. Notes. Kobe Univ. 3 (1975), 133-136.

79. K. Iseki, On nonexpansive mappings in strictly convex linear 2-normed spaces, Math. Sem. Notes. Kobe Univ. 3 (1975), 125-129.

80. K. Iseki, Some applications of Banach type contraction principles, Math. Sem. Notes. Kobe Univ. 4 (1976), 211-214.

81. K. Iseki, Mathematics on 2-normed spaces, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 4 (1976), 161-174.

82. K. Iseki, P.L.Sharma and B.K.Sharma, Contraction type mappings on 2-metric spaces, Math. Japon. 21 (1976), 67-70.

83. K. Iseki and S. L. Singh, Fixed point theorems in 2 metric spaces, Indian J.Phys, Natur.Sci. 3B (1983), 32-34.

84. S. Ishikawa, Fixed points by a new iteration method, Proc. Amer. Math. Soc., 44 (1974), 147-150.

85. V. I. Istratescu, Fixed Point Theory, D. Reidel Publishing Conpany, Holland, 1981.

86. B. J. Jaing, Topological fixed point theory and applications, Springer-Verlag, Vol. 1411, 1989.

87. G. Jungck, Commuting maps and fixed points, Amer. Math. Monthly 83 (1976), 261-263.

88. G. Jungck, Compatible mappings and common fixed points, Internat. J. Math. Math. Sci. 9 (1986), 771-779.

89. G. Jungck, Common fixed points for commuting and compatible maps on compacta, Proc. Amer. Math. Soc. 103(1988), 977-983.

90. G. Jungck, Compatible mappings and common fixed points, (2), Internat, J. Math. Math. Sci. 11 (1988), 285-288.

91. H. Kaneko, Single valued and multivalued f-contractions, Boll. Un. Mat.Ital. (6) 4-A (1985), 29-33.

92. R. Kannan, Some results on fixed points, Bull. Cal. Math. Soc. 60 (1968), 71-76.

93. S. Kasahara, On some recent results on fixed points, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 6 (1978), 373-382.

94. M. S. Khan, On the convergence of sequences of fixed points in 2-metric spaces, Indian J. Pure Appl. Math. 10 (1979), 1062-1067.

95. M.S. Khan, Commuting mappings and fixed points in uniform spaces, Bull. Acad. Pol. Sci Ser. Mat. XXIX 9-10(1981), 499-507.

96. M. S. Khan and M. Imdad, A common fixed point theorem for a class of mappings, Indian J. Pure Appl. Math. 14 (1983), 1220-1227.

97. M.S Khan, M. Imdad and S.Swaleh, Asymptoticlly regular maps and sequences in 2-metric spaces, Indian J.Pure Appl.Math. 27 (1985), 81-88.

98. S. S. Kim, Linear 2-normed spaces, Ph.D. Thesis, Jinju (Korea), 1990.

99. Z. Kominek, A generaliztion of K.Goebel's and J.Matkowski's theorems, Univ. Salaskiw Katowicach Prace Nauk Prace Mat. 12 (1982), 30-33.

100. M. A. Krasnoselskii, Two remarks on the method of successive approximations, Uspehi Mat. Nauk 10 (1955), 123-127.

101. W. A. Krik, A fixed point theorem for mapping which do not increse distance, Amer. Math. Monthly 72 (1965), 1004-1006.

102. T. Kubiak, Common fixed points of pairwise commuting map-

pings, Math.Nachr. 118 (1984), 123-127.

103. Peter K. F. Kuhfitting, The mean-value iteration for set-valued mappings, Proc. Amer. Math. Soc. 80 (1980), 401-405.

104. C. Kulshrestha, Single-valued mappings, multi-valued mappings and fixed point theorems in metric spaces, Ph.D. Thesis, Garhwal University, Srinagar, 1983.

105. विजयेन्द्र कुमार, दूरीक एवं 2-दूरीक समष्टियों में संपाती एवं स्थिर बिंदु प्रमेय, पी-एच0डी0 शोध प्रबंध, हेमवती नंदन बहुगुणा गढ़वाल विश्वविद्यालय, श्रीनगर, अक्टूबर 1990.

106. B. K. Lahiri and K. Tiwari, Generalizations of a fixed point theorem, J. Nat. Acad. Math. 3 (1985), 43-46.

107. S. N. Lal and M. Das, Mappings with common invariant points in 2-metric spaces, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 8 (1980), 83-90.

108. S. N. Lal and A. K. Singh, An analogue of Banach's contraction principle for 2-metric spaces, Bull. Austral. Math. Soc. 18 (1978), 137-143.

109. S. N. Lal and A.K. Singh, Invariant points of generalized nonexpansive mappings in 2-metric spaces, Indian J. Math. 20 (1978), 71-76.

110. T. C. Lim, Characterization of normal structure, Proc. Amer. Math. Soc. 43 (1974), 313-319.

111. J.T. Markin, A fixed point theorem for set-valued mappings, Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1963), 639-640.

112. S. Massa, Generalized contractions in metric spaces, Boll. Un. Mat. Ital. 4(10) (1974), 689-694.

113. S. Massa and D. Roux, A fixed point theorem for generalized nonexpansive mappings, Boll. Un. Mat. Ital. A 15 (1978), 624-634.

114. J. Matkowski, Some inequalities and a generalization of Banach's principle, Bull., Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 21 (1973), 323-324.

115. J. Matkowski, Integrable solutions of functional equations, Dissertationes Mat. Vol. CXXVII, (Rozprawy), Warszawa, 1975.

6 - 18 HRD

116. K. Menger, Untersuchungen über Allgemeine matrik, Math. Ann. 100 (1928), 74-163.

117. A. Miczko and B. Palczewski, Common fixed points of contractive type mappings in a 2-metric space, Math. Nachr. 124 (1985), 341-355.

118. S.N. Mishra and S.L. Singh, Some results on coincidences and fixed points of hybrid contractions, Rostok Math. Kolloq. 40(1990), 58-70.

119. S.B. Nadler Jr., Multivalued contraction mappings, Pacific J. Math. 30 (1969), 475-488.

120. S.V.R. Naidu and J.R. Prasad, Fixed point theorems in 2-metric spaces, Indian J.Pure Appl. Math. 17 (1986), 974-993.

121. S.V.R. Naidu and J.R. Prasad, Ishikawa iterates for a pair of maps, Indian J. Pure Appl Math. 17 (2) (1986), 193-200.

122. S.A. Naimpally and K.L. Singh, Extensions of some fixed point theorems of Rhoades, J. Math. Anal. Appl. 96 (1983), 437-446.

123. S.A. Naimpally, K.L. Singh and J.H.M. Whitfield, Fixed points and closed to normal structure in locally convex spaces, Nonlinear Anal. and Appl. Marcel-Dekker New York 1982, 203-221.

124. S.A. Naimpally, S.L. Singh and J.H.M. Whitfield, Coincidence theorems for hybrid contractions, Math. Nachr. 127 (1986), 177-180.

125. K.A. Narayan, P.S. Thapliyal and Virendra, Fixed point theorems in 2-metric spaces, Math. Student 51 (1983), 215-221.

126. J.L. Nelson and K.L. Singh, Remarks on selected fixed point theorems, Math. Japon. 34 (1989), 81-82.

127. M. Newton, Uniform and strict convexity in linear 2-normed spaces, Ph.D. Thesis, Saint Louis University, 1979.

128. T. Okada, Coincidence theorems on L-spaces, Math. Japon. 26 (1981), 291-295.

129. B.G. Pachpatte, Fixed points for contraction type mappings on a 2-metric spaces Proc. Nat. Acad. Sci. India Sec. A 48 (1978), 94-102.

130. B.G. Pachpatte, Common fixed points of two mappings satisfying a new contractive type condition, Indian J.Pure Appl. Math. 14 (1983), 497-501.

131. T.K. Pal and M. Maiti, Extensions of fixed point theorms of Rhoades and Ciric; Proc. Amer. Math. Soc. 64 (1977), 283-286.

132. B.D. Pant, Fixed point theorms in probabilistic metric spaces, Ph.D. Thesis. Garhwal University, Srinagar, 1984.

133. S. Park, Fixed points of f-contractive maps, Rocky Mountain J.Math. 8 (1978), 743-750.

134. S. Park, A unified approach to fixed points of contractive maps, J.Korean Math. Soc. 16 (1980), 95-105.

135. S. Park and B.E. Rhoades, Some general fixed point theorems, Acta Sci. Math. 42 (1980), 299-304.

136. H.K. Pathak, Some results on unique common fixed points, Ganita, 37 (1) (1986), 44-52.

137. H.K. Pathak, Weak* commuting mappings and fixed points, Indian J.Pure Appl. Math. 17 (1986), 201-211.

138. H.K. Pathak, Some fixed point theorems in Banach spaces for commuting mappings, Indian J.Pure Appl. Math. 17 (1986), 969-973.

139. H.K. Pathak, Some fixed point theorems on contractive mappings, Bull. Cal. Math. Soc. 80 (1988), 183-188.

140. B. Ram, Existence of fixed points in 2-metric spaces, Ph.D. Thesis, Garhwal University, Srinagar, 1982.

141. K.P.R. Rao, A fixed point theorem for nearly densifying maps in a 2-metric space, Indain J.Math. 30 (1988), 119-121.

142. K.B. Reddy and P.V. Subrahmanyam, Extensions of Krasnoselskii's and Matkowski's fixed point theorems, Funk. Ekv. 24 (1981), 67-83.

143. S. Reich, Kannan's fixed point theorem, Boll, Un. Mat. Ital. 4 (1971), 1-11.

144. S. Reich, Fixed point theory in Hilbert ball. Contemporary Mathematics 72 (1988), 225-232.

145. B.E. Rhoades, Fixed point theorems using infinite matrices, Trans. Amer. Math. Soc. 196 (1974), 161-176.

146. B.E. Rhoades, Remarks on a paper of Chung, Comment Math. Univ. St. Pauli XXV (2) (1976), 115-116.

147. B.E. Rhoades, Comments on two fixed point iteration methods, J.Math. Anal. Appl. 56 (1976), 741-750.

148. B.E. Rhoades, A comparison of various definitions of contractive mappings, Trans. Amer. Math. Soc. 226 (1977), 256-290.

149. B.E. Rhoades, Extensions of some fixed point theorems of Ciric, Maiti and Pal, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 6 (1978), 41-46.

150. B.E. Rhoades, Contraction type mappings on a 2-metric space, Math. Nachr. 91 (1979), 151-155.

151. B.E. Rhoades, Fixed point iterations of generalized nonexpansive mappings, J.Math. Anal. Appl. 21 (1988), 554-576.

152. B.E. Rhoades, S. Sessa and M.S. Khan, On common fixed points of compatible mappings in metric and Banach spaces, Internat. J.Math. Math. Sci. 11(2) (1988), 375-392.

153. B.E. Rhoades, S. Sessa, M.S. Khan and M.D. Khan, Some fixed point theorems for Hardy-Rogers type mappings, Internat. J.Math. Math. Sci. 7(1) (1984), 75-87.

154. B.E. Rhoades, S. Sessa, M.S. Khan and M. Swaleh, On fixed points of asymptotically regular mappings, J.Austral. Math. Soc. (Series A) 43 (1987), 328-346.

155. B.E. Rhoades, S.L. Singh and C.Kulshrestha, Coincidence theorems for some multivalued mappings, Internat. J.Math. Math. Sci. 7 (1984), 429-434.

156. S. Sessa, On a weak commutativity condition of mappings in fixed point considerations, Publ. Inst. Math. (Beograd) 32(46) (1982), 175-180.

157. S.K. Samanta, An abstract fixed point theorem for multivalued mappings, Indian J.Pure Appl. Math. 20 (11) (1986), 1080-1082.

158. A.K. Sharma, A study of fixed points of mappings in metric and 2-metric spaces, Ph.D. Thesis, Delhi University, 1979.

159. A.K. Sharma, A generalization of Banach contraction principle to 2-metric spaces, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 9 (1979), 291-295.

160. B.K. Sharma and P.L. Sharma, Contraction type mappings on general 2-metric spaces, Tamkang J. Math. 7 (1976), 219-222.

161. M.R. Singh, Results on continuous mappings and fixed points in a 2-metric space using two matrices, J.Indian Acad. Math. 11(1) (1989), 39-44.

162. M.R. Singh and A.K. Chatterjee, Fixed point theorems in 2-Banach spaces, Proc. Math. Soc. B.H.U. 3 (1987), 183-189.

163. S.L. Singh, On common fixed points of commuting mappings, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 5 (1977), 131-134.

164. S.L. Singh, Generalized diminishing orbitral dimeteral sum, Math. Sem. Notes Kobes Univ. 5 (1977), 295-312.

165. S.L. Singh, Applications of a common fixed point theorem, Math, Sem. Notes Kobe Univ. 6 (1978), 37-40.

166. श्याम लाल सिंह, 2-दूरीक समष्टि में स्थिर बिंदु प्रमेय एवं इसका अनुप्रयोग, विज्ञान भारती 1 (1978) 21-26.

167. S.L. Singh, Some common fixed point theorems in L-spaces, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 7 (1979), 91-97.

168. S.L. Singh, Some contractive type principles on 2-metric spaces and applications, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 7 (1979), 1-11.

169. S.L. Singh, A common fixed point theorem in a 2-metric space, Proc. Nat. Acad. Sci. India Sec. A 53 (1983), 107-112.

170. श्याम लाल सिंह, क्रमविनिमेयी प्रतिचित्रणों हेतु हाल के स्थिर बिंदु प्रमेयों पर एक टिप्पणी, विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका 26 (1983), 259-261.

171. S.L. Singh, conicidence theorems, fixed point theorems and convergence of sequences of coincidence values, Punjab Univ. J.Math. XIX (1986), 83-97.

172. S.L. Singh, Approximating fixed points of multivalued maps, J. Natur. Phys. Sci. 2 (1988), 51-61.

173. S.L. Singh, U.C. Gairola and R. Mehndiratta, A coincidence theorem for three systems of transformations, J. Indian Math. Soc.

56 (1991), 65-70.

174. S.L. Singh, K. S. Ha and Y.J. Cho, Coincidence and fixed points of nonlinear hybrid contractions, Internat. J. Math. Math. Sci. 12 (1989), 247-256.

175. S.L. Singh and S. Kasahara, On some recent results on common fixed points, Indian J.Pure Appl. Math. 13 (7) (1982), 757-761; Corrigendum 14(1983), 1075.

176. S.L. Singh and C. Kulshrestha, A common fixed point theorem for two systems of transformations, Pusan Kyo Math. J. 2 (1986), 1-7.

177. एस0 एल0 सिंह एवं वी0 कुमार, उपगामी क्रमविनिमेयी प्रतिचित्रणों हेतु 2-दूरीक समष्टि में एक स्थिर बिंदु प्रमेय, विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका 30 (3) (1987), 169-174.

178. एस0 एल. सिंह एवं वी. कुमार, उपगामी क्रमविनिमेयी प्रतिचित्रणों हेतु 2-दूरीक समष्टि में एक स्थिर बिंदु प्रमेय II, विज्ञान परिषद. अनुसंधान पत्रिका 30 (4) (1987), 207-211.

179. एस0 एल0 सिंह, वी0 कुमार एवं ए0 गांगुली, 2-दूरीक समष्टि पर प्रतिचित्रण समूह के संपात तथा स्थिर बिंदु एवं अनुप्रयोग, विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका 32(3) (1989), 17-38.

180. S.L. Singh and S.N. Mishra, Fixed point theorems in uniform spaces, Resultate der Math. 6 (1983), 202-206.

181. S.L. Singh, S.N. Mishra and B.D. Pant, General fixed point theorem in probabilistic metric and uniform spaces, Indian J.Math. 29 (1987), 9-21.

182. S.L. Singh and K.A. Narayan, Coincidence theorems on 2-metric spaces, Nat. Acad. Sci. Letters 9 (1986), 19-22.

183. S.L. Singh and C.W. Norris, Common fixed point theorems in 2-metric spaces, Indian J. Math. 25(2) (1983), 165-170.

184. S.L. Singh and B.D. Pant, Common fixed point theorems in probabilistic metric spaces and extension to uniform spaces, Honam Math. J. 6 (1984), 1-12.

185. S.L. Singh and B.D. Pant, Fixed point theorems for commuting mappings in probabilistic metric spaces, Honam Math. J. 5 (1983),

139-149.

186. S.L. Singh and B. Ram, A note on convergence of sequences of mappings and their common fixed points in a 2-metric space, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 9 (1981) 181-185.

187. S.L. Singh and B. Ram, Common fixed points of commuting mappings in 2-metric spaces, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 10 (1982), 177-208.

188. S.L. Singh and K.P.R. Rao, Coincidence and fixed points for four mappings, Indian J. Math. 31 (1989), 215-223.

189. S.L. Singh and B.M.L. Tivari, A note on a recent generalization of Jungck contraction principle, J.UPGC Acad. Soc. 3 (1986), 13-18.

190. S.L. Singh, B.M.L. Tiwari and V.K. Gupra, Common fixed points of commuting mappings in 2-metric spaces and an application, Math. Nachr. 95 (1980), 293-297.

191. S.L. Singh and Virendra, Coincidence theorems on 2-metric spaces, Indian J.Phy. Natur. Sci. 2B(13) (1982), 32-35.

192. S.L. Singh and Virendra, A note on a fixed point theorem of Park-Rhoades and Jungck contraction principle, J.UPGC Acad. Soc. 3 (1986), 8-12.

193. S.L. Singh and Virendra, Relative asymptotic regularity and fixed points, Indian J.Math. 31(1) (1989), 99-104.

194. S.L. Singh and J.H.M. Whitefield, Contractors and fixed points, Colloq. Math. 55 (1988), 219-228.

195. S.P. Singh, Lecture notes on fixed point theorems in metric and Banach spaces, Matscience, Madras, 1974.

196. S.P. Singh and B.A. Meade, On common fixed point theorems Bull. Austral. Math. Soc. 16 (1977), 49-53.

197. N. Theip and H.D. Veit, A note on closed to normal structure, Comment Math. Univ. Carolinae 20 (1979), 29-36.

198. Virendra, Coincidence theorems and fixed point theorems on 2-metric spaces and applications, Nep. Math, Sci. Rep. 10 (1985), 1-12.

199. Virendra, Coincidence and fixed point theorems in 2-metric spaces, Ph.D. Thesis, Garhwal Univ., Srinagar, 1986.

200. C.C. Yeh, Common fixed point of continuous mappings in metric spaces, Publ. Inst. Math. (Beograd) 27 (41) (1980), 21-25.

201. A. White, 2-Banach spaces, Math. Nachr. 42 (1969), 43-60.

202. C.S. Wong Closed to normal structure and its applications, J. Functional Analysis 16 (1974), 353-358.

203. A.K. Yule and P.L. Sharma, Fixed point theorems on contractive mappings, Indian J. Pure Appl. Math. 13 (1982), 426-428.

204. J.P. Xie, Fixed point theorems for nonexpansive multivalued mappings in Banach spaces with normal structure, Kexue Tongbao 34 (1989), 163-165.

205. J. B. Baillon and S. L. Singh, Nonlinear hybrid contractions on product spaces, Far East J. Math. Sci. 1(2) (1993), 117-127.

206. J. B. Baillon and S. L. Singh, A General contractor theorem and fixed point theorems, J. Math. Phy. Sci. 28(1994), 101-118.

207. Veena Chadha, A Study in Fixed Point Theory and Stability Problems, Ph.D. Thesis, Gurukula Kangri Univ., Hardwar, 1994.

208. Shih-sen Chang Y. Q. Chen and J.L. Guo, Ekelandi variational principle and carite's fixed point theorem in probabilistic metric spaces, Acta. Math Appl. Sinica 7(3) (1991), 227-229.

209. Shih-sen Chang Yeol Je Cho and Shin Min Kang, Probabilistic Metric Spaces and Nonlinear Operator Theory, Sichaun Univ. Press, Chengdu (China), 1994.

210. B. C. Dhage, A study of Some Fixed Point Theorems, Ph.D. Thesis, Marathwada Univ., Aurangabad, 1984.

211. B. C. Dhage, Generalized metric spaces and mappings with fixed points, Bull. Calcutta Math. Soc. 84(1992), 329-336.

212. B. C. Dhage, Continuity of mappings in D-metric spaces, Bull. Calcutta Math. Soc. 86(1994), 503-508.

213. B. C. Dhage, Generalized metric spaces and topological structure I, Analene Stiint Univ. "Al. I. Cuza" Iasi 44(1998).

214. U. C. Gairola, S. L. Singh, J. H. M. Whitfield, Fixed Point theorems on product of compact metric spaces, Demonst. Math. 28(1995),

541-548.

215. Giniswamy, Fixed Point Theorems in 2-metric Spaces, M. Phil. Thesis, Bangalore Univ., Bangalore, 1996.

216. शिखा गुप्ता, स्थिर बिंदु का अस्तित्व एवं उसका सन्निकटन, पी-एच0डी0 शोध प्रबंध, गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय, हरिद्वार, 1997.

217. Olaga Hadzic, Fixed point theory in Probabilistic Metric Spaces, Serbian Academy of Sci. & Arts, Novi Sad, 1995.

218. G. S. Jeong, An interesting property of probabilistic 2-metric spaces, Math. Japon. 46(1997), 393-402.

219. R. Kaluza, Through a Reporter's Eyes : The Life of Stefan Banach, Birkhäuser, Boston, 1996.

220. S. N. Lal, S. Bhattacharya and C. Sreedhar, Peeping through the timescope for developments in functional analysis, pp. 93-112; in : Souvenir Centenary Year, Department of Mathematics (1898-1998), Banaras Hindu University, Varanasi, 1998.

221. A. B. Lohani, A Study on Existence of Fixed Points in Metric and 2-metric Spaces, Ph.D. Thesis, Kumaon Univ., Nainital, 1998.

222. J. Matkowski and S. L. Singh, Banach type fixed point theorems on product of spaces, Indian J. Math. 38(1996), 73-80.

223. A. Miczko and Palcewski, Contractions in probabilistic m-metric spaces, Review Research Novi Sad 24(1994), 43-72.

224. P. P. Murthy, S. S. Chang, Y. J. Cho and B. K. Sharma, Compatible mappings of type (A) and common fixed point theorems, Kyungpook Math. J. 32(1992), 203-216.

225. R. P. Pant, Common fixed points of non-commuting mappings, J. Math. Anal. Appl. 188(1994), 436-440.

226. R. P. Pant, R-weak commutativity and common fixed points of non-compatible maps, Ganita.

227. K. P. R. Rao, A fixed point theorem for nearly densifying maps in a 2-metric space, Ind. J. Math. 30 (1988), 119-121.

228. B. E. Rhoades, Fixed Point theorems and stability results for fixed point iteration procedures, Indian J. Pure Appl. Math. 21 (1990), 1-9.

229. B. E. Rhoades, Fixed Point theorems and stability results for fixed

point iteration procedures II, Indian J. Pure. Appl. Math. 24(1993), 697-703.

230. B. E. Rhoades, A fixed point theorem for generalized metric spaces, International J. Math. & Math. Sci. 19(1996), 457-460.

231. दे0 द0 शर्मा, 2-दूरीक, 2-बानाख़ एवं सांख्यितिकतः सदिश समष्टियों में अमूर्त संपात तथा स्थिर बिंदु समीकरणों के साधन का अस्तित्व, पी-एच0डी0 शोध प्रबंध, गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय, हरिद्वार, 1991.

232. A. H. Siddiqi and S. M. Rizvi, 2-semi-inner product spaces I, Math. Japon., 21(4)(1976), 391-397.

233. Sankatha Singh (S. P. Singh), Bruce Watson and Pramila Srivastava, Fixed Point Theory and Best Approximation : The KKM-map Principle, Kluwer Academic Publishers, 1997.

234. एस0 एल0 सिंह, प्रतिचित्रणों की क्रमविनिमेयता तथा उनके दुर्बल स्वरूप, विज्ञान गरिमा सिंधु, 13(1991), 64-66.

235. S. L. Singh, A new approach in numerical praxis, in : Proc. International Conference on Recent Developments in Mathematical Analysis with Applications to Industrial Problems, Banaras Hindu University, Varanasi, 2-5 March 1998; Progress Math. (1998).

236. S. L. Singh, S. N. Mishra and V. Chadha, Round-off stability of iterations on product spaces, C. R. Math. Acad. Sci. Canada 16(1994), 105-109.

237. एस0 एल0 सिंह एवं दे0 द0 शर्मा, ककुमा प्रमेय के समष्टीय व्यापकीकरण और अरैखिक फलनक विश्लेषण में कुछ अनुप्रयोग, विज्ञान गरिमा सिंधु, 11(1991), 46-51.

238. S. L. Singh and R. Talwar, Fixed Point theorems for expansions, Proc. Nat. Acad. Sci., India, Sect. A, 62(1992), 269-273.

239. S. L. Singh and R. Talwar, Coincidences and fixed points in probabilistic analysis, Bull. Malaysian Math. Soc. (Second Series) 17(1994), 29-43.

240. S. L. Singh, R. Talwar and Z. Wenzhi, Common fixed point theorems in 2-Menger spaces and applications, Math. Student 63(1994), 74-80.

241. Zeng Wenzhi, Probabilistic 2-metric spaces, J. Math. Research Expo. 2(1987), 241-245.

हिंदी-अंग्रेजी शब्द-सूची

अंतर्विष्ट	Contained in
अद्वितीय	Unique
अद्वितीयता	Uniqueness
अधिकतम	Maximum
अधीन	Under
अनंत	Infinity
अंतराल	Interval
अन्वेषण करना	Investigate
अनुक्रम	Sequence
अनुप्रयोज्य विश्लेषण	Applicable analysis
अनुक्रम-सीमा	Limit of a sequence
अर्धस्वतुल्य	Semireflexive
अनुसरण करना	Follow
अभिकलित्र आलेख	Computer graphic
अभिगृहीत	Axiom
अभिसरण	Convergence
अभिसरित (करना)	Converge
अमूर्त समुच्चय	Abstract set
अरिक्त समुच्चय	Nonempty set

अलुपिष्ठ	Minimal
अवकलनीय	Differentiable
अवमुख समुच्चय	Convex set
अवयव	Element
अविस्तारी	Nonexpansive
अस्तित्व	Existence
असमिका	Inequality
अह्रासमान	Nondecreasing
आगमनतः	Inductively
आलोक	View
आवर्ततः	Recursively
आविष्टि	Inclusion
आव्यूह	Matrix
इष्टतमकारी सिद्धांत	Optimization theory
इष्टतम संचालन	Optimum control
इस प्रकार	Such that
इशिकावा पुनरावृत्तिक	Ishikawa iterates
उच्चक	Supremum
उन्नत	Improved
उपगामितः क्रमविनिमेयी	Asymptotically commuting
उपगामी नियमितता	Asymptotic regularity
उपपत्ति	Proof
उपप्रमेय	Corollary
उपरि सामिसंतत	Upper semicontinuous
उपसमष्टि	Subspace

उपानुक्रम	Subsequence
ऋणेतर	Nonnegative
एकसमान समष्टि	Uniform space
एकीकृत	Unified
ककुमा प्रमेय	KKM theorem
कुल	Family
कोशी/2-कोशी	Cauchy/2-Cauchy
क्रमविनिमेयी	Commuting
क्रमविनिमेयता	Commutativity
क्रीड़ा सिद्धांत	Game theory
गणितीय विज्ञान	Mathematical science(s)
गतिकीय तंत्र	Dynamical system
टिप्पणी	Remark
तत्समक प्रतिचित्रण	Identity mapping
तुच्छ	Trivial
दुर्बल(तः) क्रमविनिमेयी	Weak(ly) commuting
दुर्बलतः संहत	Weakly compact
R-दुर्बलतः क्रमविनिमेयी	R-Weakly Commuting
दुर्बल* क्रमविनिमेयी	Weak* commuting
दूरीक	Metric
2-दूरीक/D-दूरीक	2-metric/D-metric
दूरीक समष्टि	Metric space
दूरीक समष्टियों का गुणन	Product of metric spaces
2-दूरीक समष्टि	2-metric space
2-दूरीक समष्टियों का गुणन	Product of 2-metric spaces

द्विसंतत	Bicontinuous
निकाय	System
निम्न अर्धसंतत	Lower semicontinuous
निम्नक	Infimum
निरपेक्ष मान दूरीक	Absolute value metric
निर्देश	Reference
निश्चयात्मक कथन	Assertion
परिबद्ध	Bounded
परिभाषित	Defined
परिमित सर्वनिष्ठ गुण	Finite intersection property
परिवर्त	Variant
परीक्षण	Test
पुनरावृत्तिक	Iterates
पूर्ण दूरीक समष्टि	Complete metric space
पूर्ण 2-दूरीक समष्टि	Complete 2-metric space
प्रतिचित्रण	Map/mapping/transformation
प्रमुख सैद्धांतिक उपकरण	Major theoretical tool(s)
प्रसामान्य संरचना	Normal structure
प्रसारी	Expansive
प्राकृतिक संख्या	Natural number
प्रायिकतात्मक	Probabilistic
प्रारंभिकी	Preliminaries
प्रेक्षित (करना)	Observe
प्रेरित संस्थिति	Induced topology
फलन	Function

फलनक विश्लेषण	Functional Analysis
फलनक समीकरण	Functional equation
बहुमानी	Multivalued
बानाख़ समष्टि	Banach space
बीजीय संस्थिति	Algebric Topology
भंजक सिद्धांत	Fractal theory
भूयः, भूयो	Further
मनमाना	Arbitrary
मानकित समष्टि	Normed space
2-मानकित समष्टि	2-Normed space
मान पुनरावृत्तिक विधि	Mann iteration process
यदि और केवल यदि	If and only if (iff)
यादृच्छिक	Random
यूक्लिडीय समष्टि	Euclidean space
रिक्ततः सुसंगत	Vacuously compatible
रैखिकतः आश्रित	Linearly dependent
रैखिकतः स्वतंत्र	Linearly independent
लेबेग समष्टि	Lebesgue space
वास्तविक फलन	Real-valued function
विरोध/विरोधाभास	Contradiction
विविक्त	Discrete
विवृत	Open
विशिष्ट दशा	Special case
विस्तारण/विस्तारित	Extension/extended
संकल्पना	Concept

संकुचन सिद्धांत	Contraction principle
संकुचित	Contractive
संकुचित प्रकार प्रतिचित्रण	Contractive type mapping
संकेतन	Notation(s)
संख्यात्मक विश्लेषण	Numerical analysis
संतत/संततता	Continuous/continuity
संपात	Coincidence
सरेख	Collinear
संवृत	Closed
संहत	Compact
संस्थिति विज्ञान/सांस्थितिकी	Topology
सदृश	Analogous
सन्निकटन सिद्धांत	Approximation theory
सन्निवेश (करना)	Introduce
समपरिवेश समष्टि	Uniform space
समांगता	Homogeneity
समुच्चय गुणन	Product of sets
सर्वनिष्ठ	Intersection
सर्वत्र-प्राय	Every where
सांस्थितिकतः समष्टि	Topological space
सांस्थितिकतः सदिश समष्टि	Topological(ly) vector space
सामि मानक	Semi norm
सीमांत मान	Limiting value
सीमा होगी	Has a limit
सीमा$_n$ (सीमा$_{n\to\infty}$)	Lim_n ($\mathrm{Lim}_{n\to\infty}$)

सुसंगत प्रतिचित्रण	Compatible map
स्थानतः अवमुख समष्टि	Locally convex space
स्थायित्व	stability
स्थिर बिंदु	Fixed point
स्थिर बिंदु सिद्धांत	Fixed point theory
स्वतुल्य	Reflexive
स्वेच्छ	Arbitrary

अंग्रेजी-हिंदी शब्द-सूची

2-Banach space	2-बानाख़ समष्टि
2-metric/D-metric	2-दूरीक/D-दूरीक
2-metric space	2-दूरीक समष्टि
2-normed space	2-मानकित समष्टि
Absolute value metric	निरपेक्ष मान दूरीक
Abstract set	अमूर्त समुच्चय
Algebric Topology	बीजीय संस्थिति
Analogous	सदृश
Applicable analysis	अनुप्रयोज्य विश्लेषण
Approximation theory	सन्निकटन सिद्धांत
Arbitrary	स्वेच्छ, यादृच्छिक
Assertion	निश्चयात्मक कथन
Asymptotic regularity	उपगामी नियमितता
Asymptotically commuting	उपगामितः क्रमविनिमेयी
Axiom	अभिगृहीत
Bicontinuous	द्विसंतत
Bounded	परिबद्ध
Cauchy/2-Cauchy	कोशी/2-कोशी
Closed	संवृत

Coincidence	संपात
Collinear	संरेख
Commutativity	क्रमविनिमेयता
Commuting	क्रमविनिमेयी
Compact	संहत
Compatible map	सुसंगत प्रतिचित्रण
Complete 2-metric space	पूर्ण 2-दूरीक समष्टि
Complete metric space	पूर्ण दूरीक समष्टि
Computer graphic	अभिकलित्र आलेख
Concept	संकल्पना
Contained in	अंतर्विष्ट
Continuous/continuity	संतत/संततता
Contraction principle	संकुचन सिद्धांत
Contractive	संकुचित
Contractive type mapping	संकुचित प्रकार प्रतिचित्रण
Contradiction	विरोध/विरोधाभास
Converge	अभिसरित
Convergence	अभिसरण
Convex set	अवमुख समुच्चय
Corollary	उपप्रमेय
Defined	परिभाषित
Differentiable	अवकलनीय
Discrete	विविक्त
Dynamical system	गतिकीय तंत्र
Element	अवयव

Euclidean space	यूक्लिडीय समष्टि
Every where	सर्वत्र प्राय
Existence	अस्तित्व
Expansive	प्रसारी
Extension/extended	विस्तारण/विस्तारित
Family	कुल
Finite intersection property	परिमित सर्वनिष्ठ गुण
Fixed point	स्थिर बिंदु
Fixed point theory	स्थिर बिंदु सिद्धांत
Follow	अनुसरण करना
Fractal theory	भंजक सिद्धांत
Function	फलन
Functional analysis	फलनक विश्लेषण
Functional equation	फलनक समीकरण
Further	भूयः, भूयो
Game theory	क्रीड़ा सिद्धांत
Homogeneity	समांगता
Identity mapping	तत्समक प्रतिचित्रण
If and only if (iff)	यदि और केवल यदि
Improved	उन्नत
Inclusion	आविष्टि
Induced topology	प्रेरित संस्थिति
Inductively	आगमनतः
Inequality	असमिका
Infimum	निम्नक

Infinity	अनंत
Intersection	सर्वनिष्ठ
Interval	अंतराल
Introduce	सन्निवेश (करना)
Investigate	अन्वेषण करना
Ishikawa iterates	इशिकावा पुनरावृत्तिक
Iteratates	पुनरावृत्तिक
KKM theorem	ककुमा प्रमेय
Lebesgue space	लेबेग समष्टि
Lim_n ($\lim_{n\to\infty}$)	सीमा_n ($\text{सीमा}_{n\to\infty}$)
Limit of a sequence	अनुक्रम-सीमा
Limiting value	सीमांत मान
Linearly dependent	रैखिकतः आश्रित
Linearly independent	रैखिकतः स्वतंत्र
Locally convex space	स्थानतः अवमुख समष्टि
Lower semicontinuous	निम्न अर्धसंतत
Major theoretical tool	प्रमुख सैद्धांतिक उपकरण
Mann iteration process	मान पुनरावृत्तिक विधि
Map/mapping/transformation	प्रतिचित्रण
Mathematical science(s)	गणितीय विज्ञान
Matrix	आव्यूह
Maximum	अधिकतम
Metric	दूरीक
Metric space	दूरीक समष्टि
Minimal	अल्पिष्ठ

Multi-valued	बहुमानी
Natural number	प्राकृतिक संख्या
Non-decreasing	अह्रासमान
Nonempy set	अरिक्त समुच्चय
Non-expansive	अविस्तारी
Nonnegative	ऋणेतर
Normal structure	प्रसामान्य संरचना
Normal space	मानकित समष्टि
Notation(s)	संकेतन
Numerical analysis	संख्यात्मक विश्लेषण
Observe	प्रेक्षित (करना)
Open	विवृत
Optimization theory	इष्टतमकारी सिद्धांत
Optimum control	इष्टतम संचालन
Preliminaries	प्रारंभिकी
Probabilistic	प्रायिकतात्मक
Product of 2-metric spaces	2-दूरीक समष्टियों का गुणन
Product of metric spaces	दूरीक समष्टियों का गुणन
Product of sets	समुच्चय गुणन
Proof	उपपत्ति
R-weakly commuting	R-दुर्बलतः क्रमविनिमेयी
Random	यादृच्छिक
Real-valued function	वास्तविक फलन
Recursively	पुनरावर्ततः
Reference	निर्देश

Reflexive	स्वतुल्य
Remark	टिप्पणी
Semi-norm	सामिमानक
Semi-reflexive	सामिस्वतुल्य
Sequence	अनुक्रम
Special case	विशिष्ट दशा
Stability	स्थायित्व
Subsequence	उपानुक्रम
Subspace	उपसमष्टि
Such that	इस प्रकार
Supremum	उच्चक
System	निकाय
Test	परीक्षण
Topological space	सांस्थितिक समष्टि
Topological vector space	सांस्थितिक सदिश समष्टि
Topology	संस्थिति विज्ञान/सांस्थितिकी
Trivial	तुच्छ
Under	अधीन
Uniform space	एकसमान समष्टि; समपरिवेश समष्टि
Unified	एकीकृत
Unique	अद्‌वितीय
Uniqueness	अद्‌वितीयता
Upper semicontinuous	उपरि सामिसंतत
Vacuously compatible	रिक्ततः सुसंगत
Variant	परिवर्त

View	आलोक
Weak(ly) commuting	दुर्बल(तः) क्रमविनिमेयी
Weak* commuting	दुर्बल* क्रमविनिमेयी
Weakly compact	दुर्बलतः संहत

PED. 783
1000-1999-DSK II

प्रबन्धक, भारत सरकार मुद्रणालय, फरीदाबाद द्वारा मुद्रित
एवं प्रकाशन नियंत्रक, दिल्ली द्वारा प्रकाशित, 2000
PRINTED BY THE MANAGER, GOVERNMENT OF INDIA PRESS, FARIDABAD, AND
PUBLISHED BY THE CONTROLLER OF PUBLICATIONS, DELHI, 2000