पराज्यामितीय फलन
HYPERGEOMETRIC FUNCTION

लेखक

डॉ. एच.एस. धामी

रीडर, गणित विभाग

कुमाऊँ विश्वविद्यालय

एवं

श्री ललित कुमार वर्मा

शोधछात्र

सत्यमेव जयते

वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आयोग

(मानव संसाधन विकास मंत्रालय)

माध्यमिक शिक्षा और उच्चतर शिक्षा विभाग

भारत सरकार

2000

3123 HRD/2001—1

प्रकाशक

वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आयोग,
पश्चिमी खण्ड–7, रामकृष्णपुरम,
नई दिल्ली–110 066

मूल्य { देश : 90 रुपए
विदेश : £ 1.40 या $ 2.00

बिक्री हेतु संपर्क

1. वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आयोग,
पश्चिमी खण्ड–7, रामकृष्णपुरम,
नई दिल्ली–110 066
2. प्रकाशन नियंत्रक
प्रकाशन विभाग, भारत सरकार
सिविल लाइन्स
दिल्ली–110 054

आयोग के अध्यक्ष एवं सदस्य

अध्यक्ष

डॉ. राय अवधेश कुमार श्रीवास्तव

सदस्य

1. डॉ. अनूप चोपड़ा
प्रोफेसर, ई.एन.टी.
लोकनायक जयप्रकाश
नारायण अस्पताल,
नई दिल्ली

2. प्रो. कीर्ति सिंह
सदस्य,
कृषि वैज्ञानिक चयन बोर्ड,
पूसा, नई दिल्ली

3. प्रो. बी.डी. नौटियाल
सिविल इंजीनियरी विभाग,
बनारस हिंदू विश्वविद्यालय,
वाराणसी

4. श्री डी.बी. डिमरी
पूर्व महानिदेशक,
भारतीय भूवैज्ञानिक सर्वेक्षण,
कलकत्ता

5. प्रो. प्रेम सिंह
भाषा विज्ञान विभाग,
दिल्ली विश्वविद्यालय,
दिल्ली

6. प्रो. लक्ष्मण सिंह कोठारी
पूर्व अध्यक्ष,
भौतिकी विभाग,
दिल्ली विश्वविद्यालय,
दिल्ली

विषय-सूची

(3) बीजगणितीय फलन

यदि फलन निम्नलिखित समीकरण को संतुष्ट करे,

$$P_0y^n+P_1y^{n-1} + P_2y^{n-2}+\dots\dots\dots\dots + P_{n-1} +P_n = 0,$$

जहां $P_0, P_1, P_2,\dots\dots\dots\dots P_{n-1}, P_n$ बहुपद हों, तो यह बीजगणितीय फलन कहलाएगा। यहां पर यह तथ्य ध्यान देने योग्य है कि परिमेय फलन भी एक प्रकार का बीजगणितीय फलन ही होता है।

(4) अबीजीय या भावातीत फलन

हम यह जानते हैं कि सांसारिक रिश्तों के इतर यदि मानव परब्रह्म की साधना में लीन रहे तो यह माना जाता है कि वह लोकोत्तर संसार में भ्रमण करने लग गया है और उसे इस साधना में सफलता प्राप्त करने के लिए भावातीत माध्यमों का सहारा लेना पड़ता है। इसी तरह यदि हमारा फलन बीजगणितीय (लौकिक) फलनों की श्रेणी में न रखा जा सके तो उसे अबीजीय या फिर अलौकिक अथवा भावातीत फलन कहा जा सकता है। इस श्रेणी में हम लघुगणकीय, चर घातांकी, त्रिकोणमितीय, दीर्घवृत्तीय, वृत्तीय, प्रतिलोम वृत्तीय, तरंग फलनों आदि को रख सकते हैं।

(5) विशिष्ट फलन

भावातीत संसार में आग जाने पर जिस तरह मनुष्य कुंडलिनी जागृत कर परमब्रह्म से साक्षात्कार करने की स्थिति में पहुँचता है या फिर मोक्ष प्राप्ति के विभिन्न आयाम ढूंढने लगता है, ठीक उसी तरह यदि हम अबीजीय या भावातीत फलनों के संसार में आगे बढ़ें तो हमें कुछ ऐसे फलन भी मिलते हैं जो अन्य फलनों से उच्चतर तो हैं ही, साथ में किसी न किसी अवकल समीकरण के हल भी हैं। इन फलनों की श्रेणी में हम वेसल, लेजान्डे, डिरेक डेल्टा, हार्मिट बहुपद, बीटा–गामा फलन, पराज्यामितीय फलन, E-फलन, H-फलन, G-फलन, जैकोबी बहुपद, मैथ्यू फलन, रिमान का जीटा फलन आदि को रख सकते हैं। गणितज्ञों ने यह देखा कि जब H_2 अणु के अवकल समीकरण को चरों के पृथक्करण की विधि से हल किया गया तो कुछ ऐसे मान प्राप्त हुए जो विशिष्ट फलनों की श्रेणी में रखे जा सकते थे। इस प्रकार विशिष्ट फलनों को निम्नलिखित रूप में परिभाषित किया जा सकता है:

गणितीय एवं वैज्ञानिकी दृष्टिकोण से प्रासंगिक विविध विस्तृत फलनक समीकरणों की श्रेणियों के हलों को विशिष्ट फलनों का नाम दिया जाता है। विशिष्ट फलन नाम देना इसलिए समीचीन है कि इस संवर्ग को हर फलन किसी न किसी रूप में इसी संवर्ग के दूसरे फलनों के विशिष्ट उदाहरणों के रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है।

विशिष्ट फलनों की श्रेणी के यों तो सभी फलन महत्वपूर्ण हैं लेकिन पराज्यामितीय फलन सभी फलनों के आधार स्तंभ हैं, अतः इनकी ठीक से जानकारी प्राप्त किए बिना किसी भी शोधार्थी के लिए आगे बढ़ पाना संभव नहीं हो पाता। इसी कारण से इन फलनों के बारे में विस्तार से यहां पर वर्णन करना श्रेयस्कर समझा गया है।

ज्यामितीय श्रेणी से हम सब लोग अभिज्ञ हैं अर्थात् वह श्रेणी जिसका हर अगला पद पूर्ववर्ती पद से एक निश्चित अनुपात रखता है। यदि चर x में एक ज्यामितीय श्रेणी की संरचना की जाए और इसे y लिख दिया जाए तो हमें

$$y = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

अर्थात् y के x के रूप में फलन की प्राप्ति होती है, जिसे ज्यामितीय फलन कहा जा सकता है। अब इस ज्यामितीय फलन के विभिन्न पदों में किसी निश्चित नियम से कुछ प्राचल संबद्ध कर दिए जाएं और निम्नवत् फलन की संरचना की जाए :

$$y = 1 + \frac{a}{b}x + \frac{a(a+1)}{b(b+1)}\frac{x^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)}\frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{a(a+1)(a+2)\ldots\ldots\ldots(a+n-1)}{b(b+1)(b+2)\ldots\ldots\ldots\ldots(b+n-1)}\frac{x^n}{n!} + \ldots\ldots\ldots$$

तो ज्यामितीय फलन से परे होने के कारण इसे पराज्यामितीय फलन कहा जा सकता है। इस फलन के विभिन्न पदों में हर तथा अंश दोनों में एक-एक ही प्राचल या उसी के विस्तार हैं, अतः इसे संक्षेपण के तौर पर ${}_1F_1(a; b; x)$ लिखा जा सकता है; क्योंकि यह a, b व x का फलन है, जहां x एक चर है।

इसी प्रकार यदि पराज्यामितीय श्रेणी की संरचना निम्नवत् की जाए,

$$1 + \frac{a.b}{c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{x^3}{3!} +$$

$$\ldots\ldots\ldots + \frac{a(a+1)\ldots\ldots(a+n-1)b(b+1)\ldots.(b+n-1)}{c(c+1)\ldots\ldots(c+n-1)}\frac{x^n}{n!} +$$

तो संक्षेपणात्मक रूप में इसे ${}_2F_1(a,b; c; x)$ लिखा जा सकता है। ${}_1F_1(a; b; x)$ को संगामी पराज्यामितीय फलन (नाम की व्याख्या बाद में की जाएगी) तथा ${}_2F_1(a, b; c; x)$ को इसके आविष्कारक जर्मन गणितज्ञ कार्ल फ्रैडरिक गाउस के नाम पर गाउस पराज्यामितीय फलन कहते हैं।

पराज्यामितीय फलनों में पहले गाउस फलन का वर्णन किया जाएगा और फिर इससे संगामी पराज्यामितीय फलन की व्युत्पत्ति की जाएगी और तभी हम इसके नाम की सार्थकता पर भी विचार करेंगे।

गाउस ज्यामितीय फलन निम्नलिखित अवकल समीकरण का हल होता है:

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [c-(a+b+1)x]\ \frac{dy}{dx} - aby = 0$$

इस अवकल समीकरण का घात श्रेणी हल प्राप्त करने के लिए हमें इसके विलक्षण बिंदुओं (Singular points) की स्थिति पर विचार करना होगा।

हम जानते हैं कि द्विघातीय रैखिक अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$$

का किसी बिंदु $x = x_0$ के सामीप्य में हल प्राप्त करने के लिए हमें P (x) व Q (x) के मानों में यह देखना पड़ता है कि बिंदु x_0 के सामीप्य में इनके लिए घात श्रेणी विस्तार पाना संभव है अथवा नहीं? यदि यह संभव हो तो बिंदु $x = x_0$ साधारण बिंदु कहलाता है और यदि ऐसा न हो तो इसे विलक्षण बिंदु कहते हैं।

उदाहरणार्थ अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x^2}y=0,$$

जहां $P(x)=\frac{2}{x}$ व $Q(x)=\frac{-2}{x^2}$ के लिए $x = 0$ एक विलक्षण बिंदु है। यही विलक्षण बिंदु एक नियमित एवं व्यवस्थित विलक्षण बिंदु कहलाएगा, क्योंकि $x\,P(x)$ व $x^2\,Q(x)$ दोनों वैश्लेषिक हो जा रहे हैं; अर्थात् $x = 0$ के सामीप्य में $x\,P(x)$ व $x^2\,Q(x)$ का घात श्रेणी प्रसार ज्ञात किया जा सकता है।

इस प्रकार गाउस पराज्यामितीय फलन वाले अवकल समीकरण, जिसे निम्नलिखित रूप में परिवर्तित किया जा सकता है :

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}+\left\{\frac{c-(a+b+1)x}{x(1-x)}\right\}\frac{dy}{dx}-\frac{ab}{x(1-x)}y=0\right] \text{समी. (1)}$$

के लिए x=0, 1 तथा ∞ (अनंत विलक्षण बिंदु हो जाएंगे। (इन तीन बिंदुओं अर्थात् x = 0 या 1 या अनंत रखने पर $P(x)$ व $Q(x)$ के मान अनिर्धारित या अनंत हो जा रहे हैं)

अब $xP(x)=\frac{c-(a+b+1)x}{(1-x)}=[c-(a+b+1)\,x]\,(1-x)^{-1}$

$=[c-(a+b+1)x(1+x+x^2+.......)$

$=c+[c-(a+b+1)]x+..........$

और $x^2\,Q(x)=\frac{-abx}{(1-x)}=-abx\,(1+x+x^2+......)$

$=-abx-abx^2-........$

जो यह दर्शाते हैं कि $x = 0$ नियमित एवं व्यवस्थित विलक्षण बिंदु है, क्योंकि $x\,P(x)$ व $x^2\,Q(x)$ को घात श्रेणी प्रसार के रूप में व्यक्त कर दिया गया है। इस बिंदु के लिए अवकल समीकरण का हल निम्नलिखित घात · श्रेणी के रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$\left[y=\sum_{n=0}^{\infty}an\,x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+........\right] \text{समी. (2)}$$

जहां a_0 एक अशून्य स्थिरांक है।

y के इस मान को समी. (1) में प्रतिस्थापित कर x में न्यूनतम घात अर्थात् x^{n-1} के गुणांक को शून्य के समतुल्य कर घातांकी (indicial) समीकरण

$n\,(n-1)+cn=0$ या $n\,[n-1+c]=0$

प्राप्त किया जाता है, तो n के दो मान $n_1 = 0$ व $n_2 = (1-C)$ देता है। इन दोनों मानों के द्वारा गाउस अवकल समी. (1) के दो मान प्राप्त किए जाएंगे।

समी. (2) से प्राप्त y के मान को समी. (1) में रखकर x^n के गुणांक को शून्य के समतुल्य करने पर हमें निम्नलिखित पुनरावर्तक सूत्र की प्राप्ति होती है :

$$\left[a_{n+1}=\frac{(a+n)\,(b+n)}{(n+1)(c+n)}\,an\right]\text{.......समी. (3)}$$

n = 0, 1, 2, 3,....... रखने पर

$$a_1=\frac{a.b}{1.c}a_0,\left\{a_2=\frac{(a+1)(b+1)}{2.(c+1)}a_1\right.$$

$$\left.=\frac{a\,(a+1)\;b(b+1)}{1.2.c(c+1)}a_0\right\},$$

$$a_3=\frac{(a+2)\,(b+2)}{3\,(c+2)}a_2=\frac{a\,(a+1)\,(a+2)\;b(b+1)\,(b+2)}{1.2.3.\;c(c+1)\,(c+2)}a_0$$

$$a_4=\frac{a(a+1)\,(a+2)\,(a+3)\,b(b+1)\,(b+2)\,(b+3)}{1.2.3.4.c(c+1)\,(c+2)\,(c+3)}a_0,......$$

और इसी तरह के अन्य गुणांकों की प्राप्ति होती है।

यदि $a_0 = 1$ मान लिया जाए और $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots$ के प्राप्त मानों को समी. (2) में रखा जाए तो

$$\left[y_1 = 1 + \frac{a.b}{1.c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1.2.c(c+1)}x^2 + \left\{\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1.2.3.\ c(c+1)(c+2)}\right.\right.$$

$$\left.\left. x^3\right\} + \ldots\ldots\ldots\ldots\right] \ldots\ldots\text{समी. (4)}$$

की प्राप्ति होती है जो $2F_1$ (a, b; c; x) का प्रसार है और इसे पराज्यामितीय श्रेणी कहा जा सकता है।

यदि समी. (4) में a=1 तथा c=b रखा जाए तो हमें

$y = 1 + x + x^2 + \ldots\ldots\ldots = \frac{1}{1-x}$ की प्राप्ति होती है, जो ज्यामितीय श्रेणी है और इसे ${}_2F_1$ (1, b; b; x) भी लिखा जा सकता है।

इसी प्रकार घातांकी समीकरण के दूसरे मूल $n_2 = (1-c)$ के लिए अवकल समी. (1) के हल के रूप में

$$\left[y_2 = x^{(1-c)}\left\{1 + \frac{(a+1-c)(b+1-c)}{1(2-c)}x + \ldots\ldots\ldots\ldots\right\}\right]$$

अर्थात् $y_2 = x^{(1-c)}\,{}_2F_1$ (a+1–c, b+1–c; 2–c; x) की प्राप्ति होती है।

इस तरह हम कह सकते हैं कि x = 0 के सामीप्य में गाउस अवकल समी. (1) का व्यापक हल

$y = C_1\ [{}_2F_1\ (a, b; c; x)] + c_2\ [x^{(1-c)}\ 2\ F_1\ (a+1-c,\ b+1-c;\ 2-c;\ x)]$ होगा।

जहां c_1 व c_2 समाकल के स्वेच्छाचारी स्थिरांक हैं। गाउस अवकल समी. (1) का x = 1 के सामीप्य में हल प्राप्त करने के लिए x = 0 के सामीप्य में प्राप्त हल वाली विधि लागू की जा सकती है, यदि हम समी. (1) में t = (1–x) रख दें ताकि x = 1 का t = 0 में परिवर्तन हो जाए और अवकल समी. (1) निम्नलिखित रूप में परिवर्तित हो जाए :

$$\left[\frac{d^2y}{dt^2} + \left\{\frac{(a+b-c+1)-(a+b+1)t}{t(1-t)}\right\}\frac{dy}{dt} - \frac{ab}{t(1-t)}y = 0\right] \text{समी.(5)}$$

समी. (1) से तुलना करने पर हम पाते हैं कि a व b अपरिवर्तित हैं, जबकि c = (a+b–c+1) तथा x = (1–t); इसलिए समी. (5) का व्यापक हल

$y = c_1\ \{{}_2F_1\ (a,\ b;\ a+b-c+1;\ 1-x)\} + c_2\ \{(1-x)^{c-a-b}$

${}_2F_1\ (c-b,\ c-a;\ c-a-b+1;\ 1-x)\}$ होगा।

यहाँ पर यह मानना आवश्यक है कि (c–a–b) एक पूर्णांक नहीं है।

विलक्षण बिंदु $x = \infty$ (अनंत) के सामीप्य में गाउस अवकल समी. (1) का व्यापक हल दो विधियों से प्राप्त किया जा सकता है। (1) $x = \frac{1}{y}$ रखने से विलक्षण बिंदु का रुपांतरण y = 0 में हो जाता है। ($\because x = \infty$) और तब इसी विधि से हल प्राप्त किया जा सकता है। (2) इस विधि में हल प्राप्त करने के लिए निम्नलिखित घात श्रेणी के रूप में हल माना जाता है :

$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r\, x^{-k-r}$, जिसे समी. (1) में प्रतिस्थापित करके x^{-k} के गुणांक को शून्य के समतुल्य करने पर k के दो मान a व b प्राप्त होते हैं, तथा x^{-k-r} के गुणांक को शून्य के समतुल्य करने पर निम्नलिखित पुनरावर्तक सूत्र की प्राप्ति होगी :

$$a_r = \frac{(-k-r+1)(-k-r-c)}{(-k-r+a)(-k-r+b)}a_{r-1}$$

k के दो मानों के सापेक्ष अवकल समी. (1) के निम्नलिखित दो हल प्राप्त होंगे।

$$y_1 = (-x)^{-a}\ {}_2F_1\left(a,\ a-c+1; a-b+1; \frac{1}{x}\right)$$

$$\text{व}\ \ y_2 = (-x)^{-b}\ {}_2F_1\left(b,\ b-c+1; b-a+1; \frac{1}{x}\right)$$

जिससे विलक्षण बिंदु $x = \infty$ के सामीप्य में गाउस समी. (1) का व्यापक हल

$$\left[y = c_1\left\{(-x)^{-a}\ {}_2F_1\left(a, a-c+1; a-b+1; \frac{1}{x}\right)\right\}\right.$$

$$\left.+ c_2\left\{(-x)^{-b}\ {}_2F_1\left(b, b-c+1; b-a+1; \frac{1}{x}\right)\right\}\right]$$ होगा।

गाउस अवकल समी. (1) के कुल चौबीस हल प्राप्त किए जा सकते हैं और प्राप्त हलों का आपस में रैखिक संबंध भी ज्ञात किया जा सकता है, लेकिन इसे हम गाउस पराज्यामितीय फलन के लिए कुछ महत्वपूर्ण सूत्रों की निष्पत्ति के बाद इस पुस्तक में स्थान देंगे।

सबसे पहले हम यह चाहेंगे कि गाउस पराज्यामितीय श्रेणी के व्यापक पद का मान निकाला जाए और इसके द्वारा पूरी श्रेणी व गाउस पराज्यामितीय फलन को संक्षेपणात्मक रूप दिया जाए। हम जानते हैं कि

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \left\{1 + \frac{a.b}{c}x + \frac{a(a+1)\,b(b+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots\right.$$

$$\left.\ldots.. + \frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)\ b(b+1)(b+2)\ldots(b+n-1)}{c(c+1)c(c+2)\ldots\ldots(c+n-1)}\frac{x^n}{n!} + \ldots..\right\}$$

अब $\Gamma(a) = (a-1)\,! = (a-1)\,(a-2)\,(a-3)\ldots\ldots\ldots 1$

तथा $\Gamma(a+n) = (a+n-1)! = (a+n-1)\,(a+n-2)\ldots.a(a-1)\,(a-2)\ldots.1$

$$\therefore \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = (a+n-1)(a+n-2)\ldots\ldots(a+2)(a+1)a$$

जिससे हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि गाउस पराज्यामितीय श्रेणी के व्यापक पद

$$\frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)\ b(b+1)\ (b+2)\ldots(b+n-1)}{c(c+1)\ (c+2)\ldots.(c+n-1)}\frac{x^n}{n!}$$ को

$$\frac{\Gamma(a+n)\,\Gamma(b+n)\,\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c+n)}\frac{x^n}{n!}$$ लिखा जा सकता है,

जिसका मान $\frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!}$, जहां $(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$ होगा।

अतः

$$\left[{}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!}\right] \cdots \text{ समी. (6)}$$

जहां a, b, c तथा x वास्तविक अथवा सम्मिश्र संख्याएं हो सकते हैं। यदि a व b में से कोई एक प्राचल शून्य अथवा ऋणात्मक पूर्णांक हो तो फलन एक बहुपद में बदल जाएगा लेकिन यदि c शून्य अथवा ऋणात्मक पूर्णांक हो तो फलन परिभाषित नहीं होगा। यहां यह तथ्य ध्यान देने योग्य है कि गाउस अवकल समी. (1) का हल ${}_2F_1$ (a, b; c; x) तभी होगा, जबकि $|x| < 1$, क्योंकि गाउस पराज्यामितीय श्रेणी $|x| < 1$ के लिए अप्रतिबंधित रूप से अभिबिंदुग है। यदि $|x| = 1$ हो तो श्रेणी अप्रतिबंधित रूप से अभिबिंदुग तब होगी, जब $(c-a-b) > 0$ या $c > (a+b)$.

अब हम फलन ${}_2F_1$ (a, b; c; x) के लिए कुछ ऐसे विशिष्ट उदाहरण देंगे, जिनसे इस फलन को विशिष्ट फलनों की श्रेणी में रखने की पुष्टि होती है।

हम जानते हैं कि

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots$$

$$= x\left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \ldots\ldots\right]$$

जिसे निम्नलिखित प्रारूप में भी बदला जा सकता है :

[1] $\log(1+x) = x\left[1 + \frac{1.1}{1!2}(-x) + \frac{1(1+1).1(1+1)}{2!\ 2(2+1)}(-x)^2\right.$

$$+\frac{1(1+1)\,(1+2)\,.\,1(1+1)\,(1+2)}{3!\;2(2+1)\,(2+2)}(-x)^3+\ldots\ldots\Big]$$

$$=x\;{}_2F_1\;(1,1;2;-x)$$

जिसे श्रेणी योग के रूप में $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{(1+n)}$ भी लिखा जा सकता है।

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि

[2] $\frac{1}{2x}\log\frac{(1+x)}{(1-x)}={}_2F_1\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};\;x^2\right)$

द्विपद सिद्धांत के अनुप्रयोग से

[3] $(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3!}x^3+\ldots..$

$$=1+\frac{(-n).1}{1!\,1}(-x)+\frac{-n)\,(-n+1).1(1+1)}{2!\,1(1+1)}(-x)^2+\ldots.$$

$$={}_2F_1\;(-n,1;1;-x)$$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि

[4] $(1-x)^{-a}={}_2F_1\,(a,b;b;x)$

[5] $\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots\ldots$

$$=x\left[1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-\frac{x^6}{7}+\ldots\ldots\right]$$

$$=x\left[1+\frac{\frac{1}{2}\,.\,1}{1!\,\frac{3}{2}}(-x^2)+\frac{\frac{1}{2}\,(\frac{1}{2}+1)\,.\,1(1+1)}{2!\,\frac{3}{2}\,(\frac{3}{2}+1)}(-x^2)^2+\ldots.\right]$$

$$=x\;{}_2F_1\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};-x^2\right)$$

इसी प्रकार यह भी सिद्ध किया जा सकता है कि

[6] $\text{Sin}^{-1}x=x\;{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};x^2\right)$

तथा

[7] $\text{Sin }ax={}_2F_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a;\frac{3}{2};(\text{Sin }x)^2\right)$

[8] $\text{Cos }ax={}_2F_1\left(\frac{1}{2}a,-\frac{1}{2}a,\frac{1}{2};\;(\text{Sin }x)^2\right)$

[9] $\text{Sin h }ax={}_2F_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a;\frac{3}{2};\;(\text{Sin h }x)^2\right)$

[10] $\text{Cos h }ax={}_2F_1\left(\frac{1}{2}a,-\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}\;\;(\text{Sin h }x)^2\right)$

[11] $P_n(x)={}_2F_1\left(-n,1+n;1;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)$

जहां P_n (x) लिजेन्डर बहुपदी है जिसकी निष्पत्ति रोड्रिगेज के सूत्र

$P_n(x)=\frac{1}{2^n\;n!}\frac{d^n}{dx^n}\{(x^2-1)^n\}$ से की जाती है।

[12] $K(x)=\frac{\pi}{2}\;{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;x^2\right)$

जहां K (x) दीर्घवृत्तीय समाकल को दर्शाता है। अब गाउस पराज्यामितीय फलन का संगामी पराज्यामितीय फलन में रूपांतरण दिखाया जाएगा।

$$2F_1\,(a,b;c;x)=1+\frac{a.b}{c}x+\frac{a(a+1)\,b(b+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!}+\ldots..$$

$$\therefore 2F_1\left(a,b;c;\frac{x}{b}\right)=1+\frac{a.b}{c}\frac{x}{b}+\frac{a\,(a+1).1(1+\frac{1}{b})b^2}{c(c+1)}\left(\frac{x}{b}\right)^2\frac{1}{2!}+\ldots$$

$$=1+\frac{a}{c}x+\frac{a\,(a+1)\,.\,1(1+\frac{1}{b})}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!}+\ldots..$$

[13] $\therefore \lim_{b\to\infty}\left(2F_1\ (a,\ b;\ c;\frac{x}{b}\right) = 1 + \frac{a}{c}x + \frac{a(a+1)}{c(c+1)}\ \frac{x^2}{2!} + \ldots..$

$= {}_1F_1\ (a;\ c;\ x)$

उपरोक्त रुपांतरण यह भी दर्शाता है कि फलन ${}_2F_1$ को ${}_1F_1$ में बदलने पर ${}_2F_1$ के विलक्षण बिंदु (जिनका वर्णन पीछे किया जा चुका है) ${}_1F_1$ के लिए संगामी हो जाएंगे। इसी कारण फलन ${}_1F_1$ को संगामी पराज्यामितीय फलन कहना उपयुक्त है।

इसी प्रकार हम यह भी सिद्ध कर सकते हैं कि

[14] $\lim_{b\to 0}\ {}_2F_1\left(1,\ b;\ 1;\ \frac{x}{b}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\ \frac{x^n}{n!} = e^x$

गाउस पराज्यामितीय फलन एक सममित फलन है, क्योंकि ${}_2F_1\ (a,\ b;\ c;\ x) = {}_2F_1\ (b,\ a;\ c;\ x)$ में प्राचल a व b का क्रम बदलने पर फलन के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

गाउस पराजयामितीय फलन के लिए प्रारंभिक मूल सूत्रों का वर्णन करने के उपरांत इस फलन के लिए समाकल सूत्र की व्युत्पत्ति की जाएगी। यह सिद्ध किया जाएगा कि

$$\left[2F_1\ (a,b;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\ \Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}\ (1-t)^{c-b-1}\ (1-xt)^{-a}\,dt\right] \quad \text{....समी. (7)}$$

यदि $|x| < 1$ तथा $c > b > 0$.

सभी (6) में यह दर्शाया गया है कि

$$2F_1\ (a,\ b;\ c;\ x) = \sum_{n=0}^{\infty}\ \frac{(a)_n\ (b)_n}{(c)_n}\ \frac{x^n}{n!}$$

जहां $(a)_n = \dfrac{\Gamma\ (a+n)}{\Gamma\ (a)}$

$$\therefore\ \frac{(b)_n}{(c)_n} = \frac{\Gamma\ (b+n)\ \Gamma(c)}{\Gamma\ (b)\ \Gamma(c+n)} = \frac{\Gamma\ (b+n)\ \Gamma(c)\ \Gamma(c-b)}{\Gamma\ (b)\ \Gamma(c-b)\ \Gamma(c+n)}$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\ \beta\ (b+n, c-b)$$

$$\because\ \beta(m,\ n) = \frac{\tau(m)\ \tau(n)}{\tau(m+n)}$$

$$\therefore\ \frac{(b)_n}{(c)_n} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\ \Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b+n-1}\ (1-t)^{c-b-1}\ dt$$

$$\therefore 2F_1(a,b;c;x) = \left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n\ \Gamma(c)}{\Gamma(b)\ \Gamma(c-b)}\ \frac{x^n}{n!}\int_0^1 t^{b+n-1}\ (1-t)^{c-b-1}dt\right.$$

$$\left.= \frac{\Gamma\ (c)}{\Gamma(b)\ \Gamma\ (c-b)}\int_0^1 t^{b-1}\ (1-t)^{c-b-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n\ (xt)^n}{n!}\ dt\right\}$$

$$= \left[\frac{\Gamma\ (c)}{\Gamma\ (b)\ \Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}\ (1-t)^{c-b-1}\left\{1 + a.xt + \frac{a(a+1)}{2!}(xt)^2 + \ldots..\right\}dt\right]$$

$$= \frac{\Gamma\ (c)}{\Gamma\ (b)\ \Gamma\ (c-b)}\int_0^1 t^{b-1}\ (1-t)^{c-b-1}\ (1-xt)^{-a}\,dt$$

जो तभी लागू होगा जबकि $|x| < 1$ तथा $c > b > 0$, अन्यथा ऊपर वर्णित श्रेणी प्रसार नहीं किया जा सकेगा।

समी. (7) द्वारा दिया गया परिणाम काफी महत्वपूर्ण है और चर x तथा प्राचल a, b व c के विभिन्न मान रखने पर अगले पृष्ठों पर दिए गए महत्वपूर्ण प्रमेयों की व्युत्पत्ति की जा सकती है।

(1) कूमर का प्रमेय (Kummer's theorem)

हम सिद्ध करेंगे कि

$$2F_1\ (a, b; b-a+1; -1) = \frac{\Gamma\ (b-a+1)\ \Gamma\left(\frac{b}{2}+1\right)}{\Gamma\ (b+1)\ \Gamma\left(\frac{b}{2}-a+1\right)}$$

समाकल सूत्र

$$2F_1\ (a, b; c;\ x) = \frac{\Gamma\,(c)}{\Gamma\,(b)\ \Gamma\,(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}\ (1-t)^{c-b-1}\ (1-xt)^{-a}\ dt$$

में $x = -1$ तथा $c = (b-a+1)$ रखने पर

$${}_2F_1\ (a, b; b-a+1; -1) = \frac{\Gamma\,(b-a+1)}{\Gamma\ (b)\ \Gamma\,(1-a)} \int_0^1 t^{b-1}\ (1-t)^{-a}\ (1+t)^{-a}\ dt$$

$$= \frac{\Gamma\ (b-a+1)}{\Gamma\ (b)\ \Gamma\,(1-a)} \int_0^1 t^{b-1}\ (t-t^2)^{-a}\ dt$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\,(b-a+1)}{\Gamma\,(b)\ \Gamma\,(1-a)} \int_0^1 z^{\frac{b}{2}-1}\ (1-z)^{(1-a)-1}\ dz$$

($t^2 = z$ रखने पर)

$$= \frac{\Gamma\,(b-a+1)\ \frac{b}{2}\ \Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{2\,\frac{b}{2}\ \Gamma\,(b)\ \Gamma\left(\frac{b}{2}-a+1\right)}$$

$$= \frac{\Gamma\,(b-a+1)\ \Gamma\left(\frac{b}{2}+1\right)}{\Gamma\,(b+1)\ \Gamma\left(\frac{b}{2}-a+1\right)}$$

(2) गाउस का प्रमेय (Gauss's theorem)

इस प्रमेय में यह सिद्ध किया जाएगा कि

$$\left[{}_2F_1\ (a, b; c; 1) = \frac{\Gamma\,(c)\ \Gamma\,(c-a-b)}{\Gamma\,(c-a)\ \Gamma\,(c-b)}\right] \text{.....समी. (8)}$$

समी. (7) द्वारा दिए गए समाकल सूत्र में $x = 1$ रखने पर

$${}_2F_1\ (a,\ b;\ c;\ 1) = \frac{\Gamma\ (c)}{\Gamma\,(b)\ \Gamma\,(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{(c-a-b)-1}dt$$

$$= \frac{\Gamma\,(c)}{\Gamma\,(b)\ \Gamma\,(c-b)}\ \beta\ (b,\ c-a-b)$$

$$= \frac{\Gamma\,(c)\ \Gamma\,(c-a-b)}{\Gamma\ (c-a)\ \Gamma\,(c-b)}$$

(3) वान्डरमौन्डे का प्रमेय (Vandermonde's theorem)

समी. (8) द्वारा दिए गए गाउस के प्रमेय में $a = -n$ रखने पर हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होगा :

$${}_2F_1\ (-n,\ b;\ c;\ 1) = \frac{\Gamma\,(c)\ \Gamma\ (c-b+n)}{\Gamma\ (c+n)\ \Gamma\,(c-b)}$$

$$= \frac{\Gamma\,(c)(c-b+n-1)(c-b+n-2)....(c-b+1)\ (c-b)(c-b-1)....1}{(c+n-1)\ (c+n-2).....c\ \Gamma\ (c)\ (c-b-1)\ (c-b-2)....1}$$

$$= \frac{(c-b+n-1)\ (c-b+n-2).....(c-b)}{(c+n-1)\ (c+n-2).......c}$$

$$= \frac{(c-b)_n}{(c)_n} \qquad \left\{\because (c)_n = \frac{\Gamma\ (c+n)}{\Gamma\ (c)}\right\}$$

यही वान्डरमौन्डे का प्रमेय है।

यह परिणाम c के उन ऋणात्मक पूर्णांक मानों (जे a व n से कम हों, जबकि श्रेणी अवर्णित हो जाती है) के अलावा a व c के समस्त मानों के लिए सत्य होता है।

उदाहरणार्थ

$$ {}_2F_1\,(-4,-2;-3;1) = {}_2F_1\,(-2,-4;-3;1) = \frac{(-3+4)_2}{(-3)_2} $$

$$ = \frac{1.2.3}{(-3)\,(-2)} = 1 \quad \text{लेकिन} $$

$$ {}_2F_1\,(-4,-3;-2;1) = {}_2F_1\,(-3,-4;-2;1) = \frac{(-2+4)_3}{(-2)_3} $$

$$ = \frac{2.3.4}{(-2)\,(-1)\,(0)} \quad \text{जो अवर्णित हो जाएगा।} $$

(4) बेले का प्रमेय (Bailey's theorem)

$$ {}_2F_1\left(a,1-a;c;\frac{1}{2}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}c\right)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}c\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}a\right)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}a\right)} $$

समी. (7) द्वारा दिए गए समाकल सूत्र में b=1-a तथा $x=\frac{1}{2}$ रखने पर

$$ {}_2F_1\left(a,1-a;c;\frac{1}{2}\right) = \frac{2^a\,\Gamma(c)}{\Gamma(1-a)\,\Gamma(c+a-1)} \int_0^1 t^{-a}(1-t)^{c+a-2}(2-t)^{-a}\,dt $$

$$ = \frac{2^a\,\Gamma(c)}{\Gamma(1-a)\,\Gamma(c+a-1)} \int_0^1 (1-z)^{-a}\,z^{c+a-2}\,(1+z)^{-a}\,dt $$

[z= (1-t) रखने पर]

$$ = \frac{2^{a-1}\,\Gamma(c)}{\Gamma(1-a)\,\Gamma(c+a-1)} \int_0^1 y\left(\frac{c}{2}+\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\right)-1\,(1-y)^{(1-a)-1}\,dy $$

[z^2= y रखने पर]

$$ = \frac{2^{a-1}\,\Gamma(c)\,\Gamma\left(\frac{c}{2}+\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(c+a-1)\,\Gamma\left(\frac{c}{2}-\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\right)} \quad \text{.....समी. (9)} $$

अब गामा फलन के गाउस द्विरावृत्ति सूत्र

$$ \Gamma(m)\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}}\,\Gamma(2m) $$

के अनुप्रयोग से

$$ \Gamma\left(\frac{c}{2}+\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{c}{2}+\frac{a}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{(c+a-2)}}\,\Gamma(c+a-1) $$

$$ \text{व}\ \Gamma\left(\frac{c}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{c}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{(c-1)}}\,\Gamma(c) $$

समी. (9) में $\Gamma\left(\frac{c}{2}+\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\right)$ व $\Gamma(c)$ का मान रखने से अपेक्षित सूत्र को प्राप्त किया जा सकता है।

ठीक इसी प्रकार निम्नलिखित प्रमेय को भी प्राप्त किया जा सकता है :

$$ {}_2F_1\left(a,b;\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b;\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a\right)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}b\right)} $$

जिसे गाउस का द्वितीय प्रमेय कहते हैं।

संसक्त फलन एवं पुनरावृत्ति संबंध

दो गाउस फलन संसक्त फलन कहलाते हैं, यदि वे प्राचल के एक जोड़े, जिनका अंतर एक इकाई हो, के अलावा बाकी सब समान हों। इस प्रकार ${}_2F_1$ (a, b; c; x) के लिए निम्नलिखित छह फलन ${}_2F_1$ (a±1, b; c; x), ${}_2F_1$ (a, b±1; c; x) तथा ${}_2F_1$ (a, b; c±1; x) संसक्त फलन कहलाएंगे।

इन फलनों में से कोई तीन फलन आपस में चर x में एक रैखिक संबंध से जोड़े जा सकते हैं, जिसे पुनरावृत्ति संबंध कहते हैं। ये पुनरावृत्ति संबंध फलन के लिए आंकिक तालिकाओं का विस्तारण करने में काफी उपयोगी साबित होते हैं; क्योंकि x के एक निश्चित मान के लिए केवल इतना आवश्यक है कि तीन प्राचलों a, b व c में से केवल दो इकाइयों को लेकर फलन का मान ज्ञात किया जाए। इससे फलन का मान प्राचल a, b व c के बृहत्तर परास में ज्ञात किया जा सकता है। गाउस द्वारा पंद्रह पुनरावृत्ति संबंध दिए गए हैं। सुविधा के लिए $_2F_1$ (a, b; c; x) को F तथा संसक्त फलनों को F (a±1), F (b±1) तथा F (c±1) लिखा जाता है। हम यहां पर एक पुनरावृत्ति संबंध की व्युत्पत्ति दो विधियों द्वारा करेंगे, जिनमें दूसरी विधि ज्यादा सहज एवं व्यापकता लिए हुए होने के कारण ज्यादा उपयुक्त है। यदि पुनरावृत्ति संबंध (b-a) F+aF (a+1) = bF (b+1) हो तो व्युत्पत्ति हेतु–

प्रथम विधि

बाएं पक्ष को निम्नलिखित रूप में लिखने पर

$$(b-a)\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(c)}\,F = (b-a)\,\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(c)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n}\,\frac{x^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\{(b+n)-(a+n)\}\,\frac{\Gamma(a+n)\,\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)}\,\frac{x^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(b+n+1)\,\Gamma(a+n)}{\Gamma(c+n)}\,\frac{x^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n+1)\,\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)}\,\frac{x^n}{n!}$$

$$=\Bigg[\frac{\Gamma(b+1)\,\Gamma(a)}{\Gamma(c)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b+1)_n\,(a)_n}{(c)_n}\,\frac{x^n}{n!}$$

$$-\frac{\Gamma(a+1)\,\Gamma(b)}{\Gamma(c)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+1)_n\,(b)_n}{(c)_n}\,\frac{x^n}{n!}\Bigg]$$

$$=\Bigg[\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(c)}\,b\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n\,(b+1)_n}{(c)_n}\,\frac{x^n}{n!}$$

$$-\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(c)}\,a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+1)_n\,(b)_n}{(c)_n}\,\frac{x^n}{n!}\Bigg]$$

$$=\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(c)}\,\{b\;{}_2F_1(a,b+1;c;x)-a\;{}_2F_1(a+1,\,b;\,c;\,x)\}$$

दोनों पक्षों में से $\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(c)}$ का निरसन करने पर अपेक्षित पुनरावृत्ति संबंध की प्राप्ति हो जाती है।

द्वितीय विधि

हम जानते हैं कि

$${}_2F_1(a,\,b;\,c;\,x) = 1+\frac{a.b}{c}x+\frac{a(a+1).b\,(b+1)}{c\,(c+1)}\,\frac{x^2}{2!}+\ldots..$$

$$\ldots..+\frac{a\,(a+1)\ldots.(a+n-1)\;b\,(b+1)-(b+n-1)}{c\,(c+1)\ldots.(c+n-1)}\,\frac{x^n}{n!}$$

जिसमें x^n का गुणांक $\frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n}\,\frac{1}{n!}$ है। $\left\{\because (a)_n=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}\right\}$

पुनरावृत्ति संबंध को (b–a) F = bF (b+1)–a F (a+1) लिखकर बाएं व दाएं (दोनों पक्षों के लिए) यदि x^n के गुणांक बराबर सिद्ध हो जाएं तो संबंध स्वयंसिद्ध माना जाएगा।

बाएं पक्ष के लिए x^n का गुणांक $=(b-a)\,\frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n}\,\frac{1}{n!}$ तथा दाएं पक्ष के लिए $=b\,\frac{(a)_n\,(b+1)_n}{(c)_n\,n!}-a\,\frac{(a+1)_n\,(b)_n}{(c)_n\,n!}$

$$=\frac{(a)_n\,\Gamma(b+n+1)}{(c)_n\,\Gamma(b)\,n!}-\frac{\Gamma(a+n+1)\,(b)_n}{(c)_n\,\Gamma(a)\,n!}$$

$$=\frac{(a)_n\,(b+n)}{(c)_n\,n!}\,\frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)}-\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}\,\frac{(a+n)\,(b)_n}{(c)_n\,n!}$$

$$= \left\{ \frac{(a)_n\ (b)_n}{(c)_n\ n!} (b+n-a-n) \right\}$$

जो बाएं पक्ष के लिए x^n के गुणांक के बराबर है।

इसी विधि द्वारा एक और पुनरावृत्ति संबंध की व्युत्पत्ति यहां पर की जा रही है।

$$(c-a)\ (c-b)\ F\ (c+1) = c\ (c-a-b)\ F + ab\ (1-x)\ {}_2f_1\ (a+1,\ b+1;\ c+1;\ x)$$

दाएं पक्ष के लिए x^n का गुणांक =

$$\left\{ c\,(c-a-b)\ \frac{(a)_n\ (b)_n}{(1)_n\ (c)_n} + ab\ \frac{(a+1)_n\ (b+1)_n}{(1)_n\ (c+1)_n} - \right.$$

$$\left. ab\ \frac{(a+1)_{n-1}\ (b+1)_{n-1}}{(1)_{n-1}\ (c+1)_{n-1}} \right\}$$

$$\left\{ \because (1)_n = \frac{\Gamma\,(1+n)}{\Gamma\,(1)} = \frac{n!}{1} \right\}$$

$$= \frac{(a)\ (b)_n}{(1)_n\ (c+1)_n} \{(c-a-b)(c+n) + (a+n)\ (b+n) - n(c+n)\}$$

$$= \frac{(a)_n\ (b)_n}{(1)_n\ (c+1)_n}\ (c-a)\ (c-b)$$

जो बाएं पक्ष के x^n का गुणांक भी होगा।

इसी प्रकार अन्य पुनरावृत्ति संबंधों की व्युत्पत्ति भी की जा सकती है, जो निम्नवत् हैं–

(1) $\{c-2a+(a-b)x\}\ F + a(1-x)\ F\ (a+1) = (c-a)\ F\ (a-1)$

(2) $(c-a-b)\ F + a\ (1-x)\ F\ (a+1) = (c-b)\ F\ (b-1)$

(3) $c\ \{a+(b-c)\ x\}\ F + (c-a)\ (c-b)\ x\ F\ (c+1) = ac\ (1-x)\ F\ (a+1)$

(4) $(c-a-1)\ F + aF\ (a+1) = (c-1)\ F\ (c-1)$

(5) $(b-a)\ (1-x)\ F + (c-b)\ F\ (b-1) = (c-a)\ F\ (a-1)$

(6) $c(1-x)\ F + (c-b)\ x\ F\ (c+1) = cF\ (a-1)$

(7) $\{a-1+(1-b-c)\ x\}\ F + (c-a)\ F\ (a-1) = (c-1)\ (1-x)\ F\ (c-1)$

(8) $\{c-2b+(b-a)\ x\}\ F + b(1-x)\ F\ (b+1) = (c-b)\ F\ (b-1)$

(9) $c\ \{b+(a-c)\ x\}\ F + (c-a)\ (c-b)\ x\ F\ (c+1) = bc\ (1-x)\ F\ (b+1)$

(10) $(c-b-1)\ F + b\ F\ (b+1) = (c-1)\ F\ (c-1)$

(11) $c\ (1-x)\ F + (c-a)\ x\ F\ (c+1) = cF\ (b-1)$

(12) $[\{b-1+(1+a-c)\ x\}\ F + (c-b)\ F\ (b-1) = (c-1)\ (1-x)\ F\ (c-1)]$

(13) $[c\{c-1+(1+a+b-2c)\}\ F + (c-a)\ (c-b)\ x\ F\ (c+1) =$

$c\ (c-1)\ (1-x)\ F\ (c-1)]$

यहां पर यह तथ्य ध्यान देने योग्य है कि दो पुनरावृत्ति संबंधों में से किसी एक संसक्त फलन का विलोपन (युगपत्समीकरणों की तरह) कर तीसरे संबंध की व्युत्पत्ति की जा सकती है। उदाहरणार्थ पुनरावृत्ति संबंध (5) व (6) से संबंध (11) की गणना आसानी से की जा सकती है।

गाउस पराज्यामितीय फलन का अवकलन

हम जानते हैं कि

$${}_2F_1\ (a,\ b;\ c;\ x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n\ (b)_n}{(c)_n}\ \frac{x^n}{n!}$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d}{dx}\ \{{}_2F_1\ (a,\ b;\ c;\ x)\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n\ (b)_n}{(c)_n\ (n-1)!}\ x^{n-1}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+1}\ (b)_{m+1}}{(c)_{m+1}\ m!}\ x^m$$

[(n–1)=m रखने पर]

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a\,(a+1)_m \; b\,(b+1)_m}{c(c+1)_m} \; \frac{x^m}{m!}$$

$$\left[\because (a)_{m+1} = \frac{\Gamma\,(a+m+1)}{\Gamma\,(a)} = a\,(a+1)_m\right]$$

$$= \frac{ab}{c} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a+1)_m \; (b+1)_m}{(c+1)_m} \; \frac{x^m}{m!}$$

$$\therefore \left\{\frac{d}{dx}\; {}_2F_1\,(a,b;\,c;x)\right\} = \left\{\frac{ab}{c}\; {}_2F_1\,(a+1,\,b+1;\,c+1;\,x)\right\}$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष एक बार फिर से अवकलन करने पर

$$\frac{d^2}{dx^2}\left\{{}_2F_1\,(a,b;\,c;\,x)\right\} = \frac{ab}{c} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(a+1)_m \; (b+1)_m}{(c+1)_m} \; \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$= \frac{a\,(a+1)\; b\,(b+1)}{c\,(c+1)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(a+2)_p \; (b+2)_p}{(C+2)_p} \; \frac{x^p}{p!}$$

[(m−1)=p रखने पर]

$$= \frac{a\,(a+1)\; b(b+1)}{c\,(c+1)}\; {}_2F_1\,(a+2,\,b+2;\,c+2;\,x)$$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$$\frac{d^n}{dx^n}\left\{{}_2F_1\,(a,b;c;x)\right\} = \left\{\frac{a(a+1)\ldots.(a+n-1)\; b(b+1)\ldots.(b+n-1)}{c(c+1)\ldots\ldots(c+n-1)}\; {}_2F_1\,(a+n,\,b+n;\,c+n;\,x)\right\}$$

$$= \frac{(a)\;(b)_n}{(c)_n}\; {}_2F_1\,(a+n,\,b+n;\,c+n;\,x)$$

एक और अवकलन सूत्र की व्युत्पत्ति कर हम यहां पर विभिन्न अवकलन सूत्रों की सूची पाठकों के लिए अभ्यास हेतु देंगे।

$$\frac{d}{dx}\left\{x^a\; {}_2F_1\,(a,\,b;\,c;\,x)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\,(a+n+1)\;(b)_n}{\Gamma\,(a)\;(c)_n} \; \frac{x^{a+n-1}}{n!}$$

$$= a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+1)_n \; (b)_n}{(c)_n} \; \frac{x^{a+n-1}}{n!}$$

$$= a\; x^{a-1}\; {}_2F_1\,(a+1,\,b;\,c;\,x)$$

इसी प्रकार

$$\frac{d^2}{dx^2}\left\{x^{a+1}\; {}_2F_1\,(a,\,b;\,c;\,x)\right\} = a(a+1)\; x^{a-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+2)_n\;(b)_n}{(c)_n} \; \frac{x^n}{n!}$$

$$= (a)_2\; x^{a-1}\; {}_2F_1\,(a+2,\,b;\,c;\,x)$$

$$\left[\because (a)_2 = \frac{\Gamma\,(a+2)}{\Gamma\,(a)} = a(a+1)\right]$$

व n पदों तक उत्तरोत्तर अवकलन करने पर

$$\frac{d^n}{dx^n}\left\{x^{a+n-1}\; {}_2F_1\,(a,\,b;\,c;\,x)\right\} = \left\{(a)_n\; x^{a-1}\; {}_2F_1\,(a+n,\,b;\,c;\,x)\right\}$$

निम्नलिखित अवकलन सूत्र भी इसी प्रकार निकाले जा सकते हैं—

(1) $$\frac{d^n}{dx^n}\left\{x^{c-a+n-1}\,(1-x)^{a+b-c}\; {}_2F_1\,(a,b;\,c;\,x)\right\} = \left\{(c-a)_n\; x^{c-a-1}\,(1-x)^{a+b-c-n}\; {}_2F_1\,(a-n,b;c;\,x)\right\}$$

(2) $$\frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x)^{a+b-c}\; {}_2F_1\,(a,\,b;\,c;\,x)\right\} = \left\{\frac{(c-a)_n\;(c-b)_n}{(c)_n}\,(1-x)^{a+b-c-n}\; {}_2F_1\,(a,b;c+n;x)\right\}$$

(3) $$\frac{d^n}{dx^n}\left\{x^{c-1}\,{}_2F_1\,(a,b;c;x)\right\} = \left\{(c-n)_n\; x^{c-n-1}\,{}_2F_1(a,b;c-n;x)\right\}$$

(4) $\frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x)^{a+n-1}{}_2F_1(a,b;c;x)\right\} = \left[\frac{(-1)^n (a)_n (c-b)_n (1-x)^{a-1}}{(c)_n}\right.$

$\left. {}_2F_1\ (a+n,\ b;\ c+n;\ x)\right]$

(5) $\frac{d^n}{dx^n}\left\{x^{c-1}\ (1-x)^{b-c+n}\ {}_2F_1(a,b;\ c;\ x)\right\} =$

$\left\{(c-n)_n\ x^{c-1-n}\ (1-x)^{b-c}\ {}_2F_1\ (a-n,\ b;\ c-n;\ x)\right\}$

(6) $\frac{d^n}{dx^n}\left\{x^{c-1}\ (1-x)^{a+b-c}\ {}_2F_1(a,b;\ c;\ x)\right\} =$

$\left\{(c-n)_n\ x^{c-1-n}\ (1-x)^{a+b-c-n}\ {}_2F_1\ (a-n,\ b-n;\ c-n;\ x)\right\}$

गाउस पराज्यामितीय फलन के लिए विशेष संकलन प्रमेय

$${}_2F_1\ (a,b;\ c;\ x) = (1-x)^{-a}\ {}_2F_1\left(a,\ c-b;\ c;-\frac{x}{1-x}\right)$$

यदि $|x| < 1$ और $\left|\frac{x}{(1-x)}\right| < 1$

गाउस पराज्यामितीय फलन के लिए निकाले गए समाकल सूत्र (जो समी. (7) द्वारा दिया गया है) में $t = (1-z)$ रखने पर

$${}_2F_1\ (a,b;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 (1-z)^{b-1}\ z^{c-b-1}\ (1-x+xz)^{-a}\ dz$$

$$= \frac{(1-x)^{-a}\ \Gamma(c)}{\Gamma(b)\ \Gamma(c-b)}\int_0^1 z^{c-b-1}\ (1-z)^{c-(c-b-1)}\left(1-\frac{x}{-1+x}\right)^{-a} dz$$

$$= (1-x)^{-a}\ {}_2F_1\left(a, c-b;\ c;\ -\frac{x}{1-x}\right)$$

बाएं पक्ष में b की जगह (c-b) रखने पर अपेक्षित परिणाम की प्राप्ति हो जाती है जो $x|<\frac{1}{2}$ के लिए लागू होगी। इसे $|x| < 1$ तथा वास्तविक $(x) < \frac{1}{2}$ परास के लिए भी विस्तारित किया जा सकता है।

यदि हम $x \to -1$ कर दें तो उस परिस्थिति में जबकि (b–a) का वास्तविक मान –1 से ज्यादा हो, हमें निम्नलिखित महत्वपूर्ण परिणाम की प्राप्ति होती है :

$${}_2F_1\ (a,\ c-b;\ c;\ -1) = 2^{-a}\ {}_2F_1\ (a,\ b;\ c;\ ½)$$

गाउस अवकल समीकरण के हलों का आपस में रैखिक संबंध

गाउस अवकल समी. (1) के विलक्षण बिंदु x = 0, 1 तथा ∞ (अनंत) पर साधन (हल) करने पर इस बात का जिक्र किया जा चुका है कि इनके बीच एक आपसी रैखिक संबंध निकाला जा सकता है। (देखें पृष्ठ 9)

गाउस असकल समी. के परिवर्तित रूप (5) के लिए निकाला गया हल

$C_1\ \{{}_2F_1\ (a,\ b;\ a+b-c+1;\ 1-x)\} + C_2\ \{c1-x)^{c-a-b}$

${}_2F_1\ (c-a,\ c-b;\ c-a-b+1;\ 1-x)\}$

इसमें उल्लिखित फलनों की श्रेणियाँ (0, 1) अंतराल में अभिबिंदुग है तथा फलन ${}_2F_1$ (a, b; c; x) की श्रेणी भी $|x| < 1$ पर अभिबिंदुग है, अतः हम मान सकते हैं कि (0, 1) अंतराल में निम्नलिखित प्रकार का रैखिक संबंध हो सकता है :

$$\left[{}_2F_1\ (a,\ b;\ c;\ x) = \left\{C_1 \cdot {}_2F_1\ (a,\ b;\ a+b-c+1;\ 1-x)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\ C_2(1-x)^{c-a-b}\ {}_2F_1\ (c-a,\ c-b;\ c-a-b+1;\ 1-x)\right\}\right] \quad \text{समी. (10)}$$

स्थिरांक C_1 व C_2 के मान ज्ञात करने के लिए हमें यह मानना पड़ेगा कि a+b < c < 1, ताकि तीनों फलनों की श्रेणियां अभिबिंदुग हो सकें।

समी. (10) में x = 0 रखने पर

$1 = \{C_1 \cdot {}_2F_1\ (a,\ b;\ a+b-c+1;\ 1) + C_2 \cdot {}_2F_1\ (c-a,\ c-b;\ c-a-b+1;\ 1)$

तथा x = 1 रखने पर

$$ {}_2F_1\ (a, b; c; 1) = C_1 = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} \ [\text{गाउस प्रमेय से}] $$

तथा

$$ 1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} \cdot \frac{\Gamma(a+b-c+1)\,\Gamma(1-c)}{\Gamma(b-c+1)\,\Gamma(a-c+1)} + $$

$$ C_2 . \frac{\Gamma(c-a-b+1)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-b)\,\Gamma(1-a)} $$

या $$ 1 = \frac{\{\pi \operatorname{cosec} c\pi\}\{\pi \operatorname{cosec} \pi(c-a-b)}{\{\pi \operatorname{cosec} \pi(c-a)\}\{\pi \operatorname{cosec}\pi(c-b)\}} + $$

$$ C_2 . \frac{\Gamma(c-a-b+1)\,\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-b)\,\Gamma(1-a)} $$

$$ [\therefore \Gamma(c)\,\Gamma(1-c) = \pi \operatorname{cosec} \pi] $$

या $$ C_2 \frac{\Gamma(c-a-b+1)\,\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-b)\,\Gamma(1-a)} = 1 - \frac{\operatorname{Sin}\pi(c-a).\operatorname{Sin}\pi(c-b)}{\operatorname{Sin}\pi c.\operatorname{Sin}\pi(c-a-b)} $$

$$ = \frac{-2\operatorname{Sin}\pi b.\operatorname{Sin}\pi a}{2\operatorname{Sin}\pi c.\operatorname{Sin}\pi(c-a-b)} $$

या $$ C_2 . \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)} . \frac{\{\Gamma(a+b-c)\Gamma(1-a-b+c)\}\,\{\Gamma(c)\Gamma(1-c)\}}{\{\Gamma(b)\Gamma(1-b)\}.\{\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)\}} $$

$$ = \frac{\operatorname{Sin}\ \pi\ a.\ \operatorname{Sin}\ \pi\ b}{\operatorname{Sin}\pi c.\operatorname{Sin}\pi(a+b-c)} $$

$$ \therefore C_2 = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)} $$

C_1 व C_2 के मान समी. (10) में रखने पर अपेक्षित रैखिक संबंध स्थापित हो जाता है। इसी प्रकार के अन्य रैखिक संबंध भी स्थापित किए जा सकते हैं। उदाहरणार्थ हम मान सकते हैं कि

$[(1-x)^{c-a-b}\ {}_2F_1\ (c-a, c-b; c; x) = \{C_1 . {}_2F_1\ (a, b; c; x) +$

$C_2\, x^{1-c}\ {}_2F_1\ (1+a-c, 1+b-c; 2-c; x\}]$ समी. (11)

जहां पर दाएं पक्ष के हल गाउस अवकल समी. (1) के लिए विलक्षण बिंदु x = 0 के सामीप्य में निकाले गए हैं तथा बाएं पक्ष का हल तब निकलेगा जब हम गाउस अवकल समी. (1) में y के स्थान पर $(1-x)^k w$ प्रतिस्थापित करेंगे ताकि अवकल समी. निम्नलिखित रूप में परिवर्तित हो जाए।

$$ \left[x\,(1-x)\frac{d^2w}{dx^2} + \{c-(a+b+1+2k)x\}\frac{dw}{dx} + \left\{\frac{k(k-1)x - k\{c-(a+b+1)x}{1-x} - ab\right\}w\right] = 0 $$

जो गाउस पराज्यामितीय समी. का प्रारुप ले लेगा, यदि k = 0 या k = (c–a–b). k = 0 रखने पर हमें इस समीकरण के दो हल $y_1 = {}_2F_1$ (a, b; c; x) तथा $y_2 = x^{1-c}\ {}_2F_1$ (1+a–c, 1+b–c; 2–c; x) प्राप्त होंगे तथा k = (c–a–b) रखने पर |x| < 1 के परास में निम्नलिखित दो हल निकलेंगे :

$$ y_3 = (1-x)^{c-a-b}\ {}_2F_1\ (c-a, c-b; c; x) $$

तथा $y_4 = x^{(1-c)}\,(1-x)^{c-a-b}\ {}_2F_1\ (1-a, 1-b; 2-c; x)$

हल y_3 को रैखिक संबंध स्थापित करने के लिए चुना गया है।

समी. (11) में x = 0 रखने पर हमें $C_1 = 1$ प्राप्त होता है तथा साथ ही यह तथ्य भी ध्यान देने योग्य है कि समी. (11) के बाएं एवं पक्ष का हम x के घातों में प्रसार ज्ञात कर सकते हैं जबकि यह x^{1-c} के लिए परिकल्पना के आधार पर संभव नहीं है, क्योंकि c पूर्णांक नहीं है। अतः हमें C_2=0 की प्राप्ति होती है जिससे यह निष्कर्ष निकलता है कि ${}_2F_1$ (a, b; c; x) = {(1–x)$^{c-a-b}$ ${}_2F_1$ (c–a, c–b; c; x)} जिसे ऑयलर सर्वसमिका (Euler's identity) भी कहते हैं।

गाउस का न्यूनीकरण प्रमेय (Gauss's reduction formula)

गाउस पराज्यामितीय फलन के लिए हम निम्नलिखित पुनरावृत्ति संबंध को सिद्ध कर चुके हैं।

$$ (c-a)\,(c-b)\ {}_2F_1\ (a, b; c+1; x) = c(c-a-b)\ {}_2F_1\ (a, b; c; x) + ab\,(1-x)\ {}_2F_1\ (a+1, b+1; c+1; x) $$

जहाँ |x| < 1 इन शर्तों के अधीन कि (c–a–b) का मान शून्य से बढ़ा

है तथा a, b व c न तो शून्य है और न ऋणात्मक पूर्णांक; तो सीमा $x \to 1$ लेने पर

$$_2F_1\ (a, b; c; 1) = \frac{(c-a)\ (c-b)}{c\,(c-a-b)}\ _2F_1\ (a, b; c+1; 1)$$

इसी सूत्र का n बार अनुप्रयोग करने पर

$$_2F_1\ (a, b; c; 1) = \frac{(c-a)_n\ (c-b)_n}{(c)_n\ (c-a-b)_n}\ _2F_1\ (a, b; c+n; 1)$$

जिसे गाउस का न्यूनीकरण प्रमेय कहते हैं।

अब $$\frac{(c-a)_n\ (c-b)_n}{(c)_n\ (c-a-b)_n} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)\Gamma(c-a+n)\Gamma(c-b+n)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(c+n)\Gamma(c-a-b+n)}$$

$$\left[\because (c)_n = \frac{\Gamma\ (c+n)}{\Gamma\ (c)}\right]$$

$$\to \frac{\Gamma(c)\ \Gamma(c-a-b)}{\Gamma\ (c-a)\ \Gamma\ (c-b)}$$

जब n अनंत की ओर अग्रसर हो रहा हो। दूसरी पंक्ति से हम कह सकते हैं कि

$$\frac{(c-a)_n\ (c-b)_n}{(c)_n\ (c-a-b)_n}\ _2F_1\ (a, b; c+n; 1) \to \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

जब $n \to \infty$

$$\because |_2F_1\ (a, b; c+n; 1)| \le 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(|a|)_m\ (|b|)_m}{m!\ (n-|c|)_m}$$

$$\le 1 + \frac{|a|\ |b|}{n-|c|}\ _2F_1\ (|a|+1, |b|+1; n-|c|+1; 1)$$

$$\le 1 + \frac{|a|\ |b|}{n-|c|}\ M \quad \text{जब } n > |c|$$

जहां M स्थिरांक है और इसका मान इकाई की ओर अग्रसर हो जाएगा जब $n \to \infty$.

$$\therefore\ _2F_1\ (a, b; c; 1) = \frac{\Gamma\ (c)\ \Gamma\ (c-a-b)}{\Gamma\ (c-a)\ \Gamma\ (c-b)}$$

जो गाउस का प्रमेय है और यह विधि गाउस प्रमेय निकालने की दूसरी विधि मानी जा सकती है।

डिक्सन का प्रमेय (Dixon's theorem)

इस प्रमेय में गाउस पराज्यामितीय फलन $_2F_1$ से उच्चतर $_3F_2$ फलन का निर्माण किया जाएगा, जो निम्नवत है–

$$_3F_2\left[\begin{matrix}a, & b,\ c,\ 1\\ 1+a-b, & 1+a-c\end{matrix}\right] = \frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b-c\right)\Gamma(1+a-b)\Gamma(2+a-c)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-b-c)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-c\right)}$$

हम जानते हैं कि

$$\frac{\Gamma\ (a)\ \Gamma\ (b)\ \Gamma(c)}{\Gamma\ (1+a-b)\Gamma\ (1+a-c)}\ _3F_2\left[\begin{matrix}a, & b,\ c,\ 1\\ 1+a-b, & 1+a-c\end{matrix}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\ \Gamma(b+n)\ \Gamma(c+n)}{\Gamma\ (1+a-b+n)\ \Gamma\ (1+a-c+n)} \cdot \frac{1}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\ \Gamma(b+n)\ \Gamma(c+n)}{n!\Gamma\ (1+a+2n)\ \Gamma\ (1+a-b-c)} \cdot \frac{\Gamma\ (1+a+2n)\ \Gamma\ (1+a-b-c)}{\Gamma\ (1+a-b+n)\Gamma(1+a-c+n)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\ \Gamma(b+n)\ \Gamma(c+n)}{n!\Gamma\ (1+a+2n)\ \Gamma\ (1+a-b-c)}\ _2F_1\left(b+n, c+n; 1+a+2n; 1\right)$$

$$\left[\text{गाउस प्रमेय } _2F_1\ (a, b; c; 1) = \frac{\Gamma\ (c)\ \Gamma\ (c-a-b)}{\Gamma\ (c-a)\Gamma\ (c-b)} \text{ से}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\ (a+n)\ \Gamma\ (b+n)\Gamma\ (c+n)}{n!\Gamma(1+a+2n)\Gamma(1+a-b-c)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(b+n)_m (c+n)_m}{(1+a+2n)_m\ \ m!}$$

$$\left[\because\ _2F_1\ (a, b; c; x) = \sum_{m=0} \frac{(a)_m\ (b)_m}{(c)_m}\ \frac{x^m}{m!}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\ (a+n)\ \Gamma(b+n+m)\ \Gamma\ (c+n+m)}{\Gamma\ (1+a+2n+m)\ \Gamma(1+a-b-c)n!\ m!}$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b+p)\,\Gamma(c+p)}{\Gamma(1+a-b-c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{n!\,(p-n)!\,\Gamma(1+a+n+p)}$$

[संकलन का क्रम बदलकर m+n = p रखने पर]

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b+p)\,\Gamma(c+p)}{\Gamma(1+a-b-c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{n!\,\Gamma(1+a+n+p)} (-1)^n \frac{(-p)^n}{p!}$$

[$\frac{1}{(p-n)!}$ का मान रखने पर]

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b+p)\,\Gamma(c+p)\,\Gamma(a)}{p!\,\Gamma(1+a-b-c)\,\Gamma(1+a+p)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n\,(-p)_n}{(1+a+p)_n} \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b+p)\,\Gamma(c+p)\,\Gamma(a)}{p!\,\Gamma(1+a-b-c)\,\Gamma(1+a+p)}\; {}_2F_1\,(-p, a; 1+a+p; -1)$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b+p)\,\Gamma(c+p)}{p!\,\Gamma(1+a-b-c)\,\Gamma(1+a+p)} \cdot \frac{\Gamma(1+a+p)\,\Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma\left(\frac{a}{2}+p+1\right)}$$

[कूमर के प्रमेय से]

$$= \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)}{\Gamma(1+a)\,\Gamma(1+a-b-c)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(b)_p\,(c)_p}{\left(\frac{a}{2}+1\right)_p} \frac{1}{p!}$$

$$= \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)}{\Gamma(1+a)\,\Gamma(1+a-b-c)}\; {}_2F_1\left(b, c; \frac{a}{2}+1; 1\right)$$

$$= \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)}{\Gamma(1+a)\,\Gamma(1+a-b-c)} \; \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}+1-b-c\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}+1-b\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}+1-c\right)}$$

$$\therefore\ {}_3F_2 \left[\begin{matrix} a, & b, & c, & 1 \\ 1+a-b, & 1+a-c & & \end{matrix}\right] =$$

$$\frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b-c\right)\Gamma(1+a-b)\,\Gamma(1+a-c)}{\Gamma(1+a)\,\Gamma(1+a-b-c)\,\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-c\right)}$$

और यही डिक्सन का प्रमेय है।

अब हम लेजान्ड्रे फलन $p_n(x)$ को गाउस पराज्यामितीय फलन के पदों में व्यक्त करने वाले दो सूत्रों की व्युत्पत्ति करेंगे—

(1) $p_n(x) = {}_2F_1\left(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2}\right)$

रोड्रिगेज के सूत्र से हम जानते हैं कि

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$$

$$= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left\{(x-1)^n \left(\frac{1}{2}(x+1)\right)^n\right\}$$

$$= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x-1)^n \left\{1 - \frac{1}{2}(1-x)\right\}^n\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x)^n \left\{1 - \frac{n}{2}(1-x) + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{(1-x)^2}{4} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{(1-x)^3}{8} + \ldots\right\}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x)^n - \frac{n}{2}(1-x)^{n+1} + \frac{n(n-1)}{2!\,2^2}(1-x)^{n+2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!\,2^3}(1-x)^{n+3} + \right.$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!}\left[(-1)^n\ n! - \frac{n}{2}(-1)^n\ \frac{(n+1)!}{1!}(1-x) + \frac{n(n-1)}{2!}\ \frac{(-1)^n}{2^2}\ \frac{(n+2)!}{2!}(1-x)^2 \ldots\right]$$

$$= \left[1 + \frac{(-n)(n+1)}{1.1!}\left(\frac{1-x}{2}\right) + \left\{\frac{(-n)(-n+1)(n+1)(n+2)}{1.2.\ 2!}\left(\frac{1-x}{2}\right)^2\right\} + \ldots\ldots\right]$$

$$= {}_2F_1\left(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2}\right)$$

फलन $p_n(x)$ को n घात की लेजान्ड्रे वहुपद भी कहा जाता है।

(2) $p_n(\cos\varphi) = \cos^n\varphi \,.\, {}_2F_1\left(-\frac{n}{2}, -\frac{n-1}{2}; 1; -\tan^2\varphi\right)$

लाप्लास के पहले समाकल से हम जानते हैं कि

$$p_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[x + \sqrt{(x^2-1)}\cos\phi\right]^n d\phi$$

इस परिणाम में $x = \cos\varphi$ रखने पर

$$p_n(\cos\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos\varphi + i\sin\varphi\cos\varphi]^n\, d\phi$$

$$= \frac{1}{\pi}\cos^n\varphi\int_0^{\pi}[1 + i\tan\varphi\cos\varphi]^n\, d\phi$$

$$= \frac{1}{\pi}\cos^n\varphi\int_0^{\pi}\left\{1 + ni\tan\varphi\cos\varphi + \frac{n(n-1)}{2!}\, i^2\tan^2\varphi\cos^2\phi + \ldots\right\}d\phi$$

$$= \frac{1}{\pi}\cos^n\varphi\left[\int_0 d\phi + \frac{n(n-1)}{1!}\, i^2\tan^2\varphi\int_0^{\pi/2}\cos^2\phi\, d\phi + \ldots\right]$$

निश्चित समाकल के गुण

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx \quad \text{यदि } f(-x) = f(x)$$

$$= 0 \quad \text{यदि } f(-x) = -f(x)$$

से

$$= \frac{1}{\pi}\cos^n\varphi\left[\pi + i^2\ \frac{n(n-1)}{1!}\tan^2\varphi.\ \frac{\pi}{4} + i^4\ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}.2.\frac{1.3}{2.4}(-\tan^2\varphi) + \ldots\right]$$

$$= \cos^n\varphi\left[1 + \frac{\left(-\frac{n}{2}\right)\left(-\frac{n-1}{2}\right)}{1!}(-\tan^2\varphi) + \frac{\left(-\frac{n}{2}\right)\left(-\frac{n}{2}+1\right)\left(-\frac{n-1}{2}\right)\left(-\frac{n-1}{2}+1\right)}{1.2.\ 2!}(-\tan^2\varphi)^2 + \ldots\right]$$

$$= \cos^n\varphi\,.\,{}_2F_1\left[-\frac{n}{2}, -\frac{n-1}{2}; 1; -\tan^2\varphi\right]$$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$$p_n(x) = \left(\frac{x-1}{2}\right)^n {}_2F_1\left(-n, -n; 1; \frac{x+1}{x-1}\right)$$

गाउस अवकल समीकरण के हलों का आपस में रैखिक संबंध हम पहले निकाल चुके हैं। विलक्षण बिंदु $x = \infty$ (अनंत) पर प्राप्त हल, जो ${}_2F_1\left(a, b; c; \frac{1}{x}\right)$ प्रकार का होगा, के लिए निम्नलिखित रैखिक संबंध की गणना की जा सकती है :

$$ {}_2F_1\left(a,b;c;\frac{1}{x}\right)=\left[\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}x^a{}_2F_1(a,a-c+1;a+b-c+1;1-x)\right. $$
$$ \left.+\left\{\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^b(x-1)^{c-a-b}\,{}_2F_1(c-a,1-a;c-a-b+1;1-x)\right\}\right] $$

हम पृष्ठ 26.27 पर दिखला चुके हैं कि

$$ {}_2F_1(a,b;c;x)=\left\{\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\,{}_2F_1(a,b;a+b-c+1;1-x)\right. $$
$$ \left.+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-x)^{c-a-b}\,{}_2F_1(c-a,c-b;c-a-b+1;1-x)\right\} $$

समी. (12)

x के स्थान पर $\frac{1}{x}$ रखने पर

$$ {}_2F_1\left(a,b;c;\frac{1}{x}\right)=\left\{\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\,{}_2F_1\left(a,b;a+b-c+1;1-\frac{1}{x}\right)\right. $$
$$ \left.+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{c-a-b}{}_2F_1\left(c-a,c-b;c-a-b+1;1-\frac{1}{x}\right)\right\} $$

गाउस पराज्यामितीय फलन के लिए पृष्ठ 25-26 पर विशेष संकलन प्रमेय का निम्नलिखित रूप में मान निकाला गया है :

$$ {}_2F_1(a,b;c;x)=(1-x)^{-a}\,{}_2F_1\left(a,c-b;c;-\frac{x}{1-x}\right) $$

इसमें c के स्थान पर a+b–c+1 तथा x के स्थान पर $1-\frac{1}{x}$ रखने पर

$$ {}_2F_1\left(a,b;a+b-c+1;1-\frac{1}{x}\right)=x^a{}_2F_1(a,a-c+1;a+b-c+1;1-x) $$

तथा a को c–a से, b को c–b से c को (c–a–b+1) व x को $1-\frac{1}{x}$ से प्रतिस्थापित करने पर

$$ {}_2F_1\left(c-a,c-b;c-a-b+1;1-\frac{1}{x}\right)=x^{c-a}{}_2F_1(c-a,1-a;c-a-b+1;1-x) $$

की प्राप्ति होती है, जिनको समी. (12) में रखने पर अपेक्षित परिणाम प्राप्त हो जाता है।

सालसुत्ज (Saalschutz) का संकलन प्रमेय

पृष्ठ 27-28 पर आयलर सर्वसमिका निम्नलिखित रूप में प्राप्त हुई है–

$$ {}_2F_1(c-a,\ c-b;\ c;\ x)=(1-x)^{a+b-c}\,{}_2F_1(a,\ b;\ c;\ x) $$

जिसमें, वाएं पक्ष का यदि प्रसार ज्ञात किया जाए तो x^n का गुणांक $\frac{(c-a)_n\ (c-b)_n}{(c)_n\ n!}$ होगा और इस व्यंजक का मान दाएं पक्ष के x^n के गुणांक के बराबर होना चाहिए जो दोहरी श्रेणी

$$ \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a)_r\,(b)_r\,x^r}{(c)_r\ r!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(c-a-b)_s\,x^s}{s!} $$

से बनता है। इसका दूसरा पद $(1-x)^{a+b-c}$ का x के पदों में विस्तार करने पर प्राप्त हुआ है। इस परिणाम में यदि हम s = (n-r) रख दें तो यह निम्नलिखित रूप ले लेगा (x^n के गुणांक के लिए) :

$$ \sum_{r=0}\frac{(a)_r\ (b)_r\ (c-a-b)_{n-r}}{(c)_r\ r!\ (n-r)!} $$

$$ =\frac{(c-a-b)_n}{n!}\sum_{r=0}\frac{(a)_r\ (b)_r\ (-n)_r}{r!\,(c)_r\ (1-c+a+b-n)_r} $$

$$ =\frac{(c-a-b)_n}{n!}\ {}_3F_2(a,b,-n;c,1+a+b-c-n;1) $$

अतः हम लिख सकते हैं कि

$$ \frac{(c-a)_n\ (c-b)_n}{(c)_n\ (c-a-b)_n}={}_3F_2\ (a,b,-n;c,1+a+b-c-n;\ 1) $$

यही सालसुत्ज का संकलन प्रमेय है। यह श्रेणी

$$ {}_3F_2(a,b,c;d;e;1)=\Gamma\begin{bmatrix}d,\ 1+a-e,\ 1+b-e,\ 1+c-e\\ 1-e,\ \ d-a,\ \ d-b,\ \ d-c\end{bmatrix} $$

का योग देता है, जबकि अंश का एक प्राचल ऋणात्मक पूर्णांक –n हो और d+e=1+a+b+c, अर्थात् श्रेणी सालसुत्जई हो, जब n अनंत की ओर

अग्रसर हो तो सालसुत्ज का प्रमेय गाउस के प्रमेय में परिवर्तित हो जाता है, क्योंकि

$$\frac{(-n)_r}{(1+a+b-c-n)_r} \to 1 \quad \text{जब } n \to \infty$$

यदि अंश के प्राचलों के योग में से हर के प्राचलों का योग घटा दिया जाए तो यह अंतर श्रेणी के लिए प्राचलिक आधिक्य कहलाता है, जिसे सामान्यतया वर्ग s से प्रदर्शित करते हैं। वर्तमान परिस्थिति में

$$s = d+e-a-b-c$$

क्योंकि सालसुत्जई श्रेणी में s का मान हर हमेशा 1 (इकाई) होता है।

डौगल का प्रमेय (Dougall's theorem)

इस प्रमेय में यह सिद्ध किया जाता है कि

$$ {}_7F_6\begin{bmatrix} a, 1+\frac{1}{2}a, \ b, \ c, \ d, \ e, \ f; 1 \\ \frac{1}{2}a, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e; 1+a-f; \end{bmatrix} = $$

$$\Gamma\begin{bmatrix} 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-f, 1+a-b-c-d, \\ \qquad 1+a-b-c-f, 1+a-b-d-f, 1+a-c-d-f \\ 1+a, 1+a-b-c, 1+a-b-d, 1+a-c-d, \\ \qquad 1+a-b-f, 1+a-c-f, 1+a-d-f, 1+a-b-c-d-f \end{bmatrix}$$

वशर्ते कि श्रेणी का अवसान हो जाए, और

$$1+2a = b+c+d+e+f$$

यह प्रमेय एक सुसंतुलित श्रेणी के योग को दर्शाता है, जिसमें अंश के प्राचलों के योग का हर के प्राचलों के योग से अंतर 2 है। इस प्रमेय को सिद्ध करने के लिए गणितीय आगमन की विधि प्रयुक्त होती है, जिसे पाठकों के लिए अभ्यास हेतु छोड़ा जा रहा है।

यह प्रमेय $f = 0$ के लिए प्रत्यक्षतः सत्य है। यदि हम यह मानें कि यह $f = -1, -2, \dots 1-m$ के लिए सत्य है तो हम यह देखते हैं कि दाएं पक्ष में दिए गए गामा फलन b, c, d व f में सममित हैं। अतः यह परिणाम $c=0$,

$-1, -2, \dots 1-m$ के लिए सत्य होगा, चाहे f का कोई भी मान हो और तब भी जब $d = 0, -1, -2, \dots 1-m$ वशर्ते कि $d = 1+2a-b-c-e-f$.

अतः हम कह सकते हैं कि यह परिणाम तब भी सत्य होगा, जब c निम्नलिखित 2m मानों में से कोई मान ले :

$$0, -1, -2, \dots\dots 1-m,\ 1+2a-b-d-e,\ 1+2a-b-d-e+1,$$
$$\dots\dots 1+2a-b-d-e+m-1$$

चाहे f का कोई भी मान हो।

पराज्यामितीय फलनों का द्विघातीय रूपांतरण

गाउस पराज्यामितीय फलन के लिए अब तक निकाले गए विभिन्न संबंध प्राचलों a, b व c के विभिन्न स्वेच्छाचारी मानों के लिए मान्य हैं। कई ऐसे संबंध भी ज्ञात किए जा सकते हैं जिनमें प्राचलों पर व्यवरोध लागू किए गए हों। इस प्रकार के संबंधों में सबसे दिलचस्प वे संबंध हैं, जिनमें दो स्वेच्छाचारी प्राचल हों। ये निम्नलिखित प्रकार के व्यंजकों में भी व्यक्त होते हैं।

$$\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}, \frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}, \frac{-4x}{(1-x)^2}, \dots\dots$$

और पराज्यामितीय फलन के द्विघातीय रूपांतर कहलाते हैं। हम जानते हैं कि गाउस अवकल समीकरण

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + \{c-(a+b+1)x\}\frac{dy}{dx} - aby = 0$$

के प्राचल c को से $a+b+\frac{1}{2}$ से प्रतिस्थापित कर दिया जाए तो इसका एक हल ${}_2F_1\left(a, b; a+b+\frac{1}{2}; x\right)$ होगा, जो प्रांत |कोणांक $(1-x)| < \pi$ में वैश्लेषिक होगा। इसी अवकल समी. में यदि हम

$$x^2 = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-x}\right)$$

रखें तो अवकल समीकरण पराज्यामितीय प्रकार के अवकल समीकरण में ही परिवर्तित हो जाएगा, जिसमें

$a' = 2a,\ b' = 2b$ और $c' = \left(a + b + \frac{1}{2}\right)$

और प्रांत |कोणांक $(1-x)| < \pi$ बदलकर x' (वास्तविक) $< \frac{1}{2}$ हो जाता है, जो कोणांक $(1-x')| < \pi$ का हिस्सा हो जाता है। इस समीकरण का हल विलक्षण बिंदु $x = 0$ के सामीप्य में ${}_2F_1\left(2a, 2b; a + b + \frac{1}{2}; \frac{1-\sqrt{1-x}}{2}\right)$ होता है, लेकिन चूंकि पराज्यामितीय समीकरण के किसी विलक्षण बिंदु $x=0$ के सामीप्य में दो स्वतंत्र हल नहीं हो सकते। अतः

$$ {}_2F_1\left(a, b; a + b + \frac{1}{2}; x\right) = A\ {}_2F_1\left(2a, 2b; a + b + \frac{1}{2}; \frac{1-\sqrt{1-x}}{2}\right) $$

जहां A स्थिरांक है।

$x = 0$ रखने पर A का मान 1 (इकाई) प्राप्त होता है। अतः

$$ \left[{}_2F_1\left(a, b; a + b + \frac{1}{2}; x\right) = {}_2F_1\left(2a, 2b; a + b + \frac{1}{2}; \frac{1-\sqrt{1-x}}{2}\right)\right] $$

समी. (13)

गाउस पराज्यामितीय फलन के लिए विशेष संकलन प्रमेय (देखें पृष्ठ 25-26) के रूप में निम्नलिखित परिणाम प्राप्त किया गया है :

$$ {}_2F_1(a, b; c; x) = (1-x)^{-a}\ {}_2F_1\left(a, c-b; c; \frac{x}{x-1}\right) $$

इस सूत्र का समी. (13) पर प्रयोग करने पर

$$ \left[{}_2F_1\left(a, b; a + b + \frac{1}{2}; x\right) = {}_2F_1\left(2a, 2b; a + b + \frac{1}{2}; \frac{1-\sqrt{1-x}}{2}\right)\right. $$

$$ \left. = \left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^{-2a} {}_2F_1\left(2a,\ a - b + \frac{1}{2}; a + b + \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right)\right] $$

इसी परिणाम का प्रतिलोम ज्ञात करने पर हमें निम्नलिखित सूत्र की प्राप्ति होती है :

$$ {}_2F_1(a, b; a - b + 1; x) = $$

$$ (1-x)^{-a}\ {}_2F_1\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a - b; a - b + 1; \frac{-4x}{(1-x)^2}\right) $$

पाठकों की सुलभता को ध्यान में रखते हुए यह बताना आवश्यक है कि $\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1} = x'$ रखने पर $x = \frac{-4x}{(1-x')^2}$ प्राप्त होता है और इसी प्रकार प्राचलों का भी रुपांतरण हो जाएगा।

ऊपर उद्धृत परिणाम ही कूमर का द्विधातीय रूपांतरण कहलाता है। इस प्रकार के अन्य परिणामों की विस्तृत सूची गूर्सा द्वारा दी गई है, जिनमें से कुछ महत्वूपर्ण सूत्र यहां उद्धृत किए जा रहे हैं।

(1) $$ {}_2F_1\left(a, b; \frac{1}{2}(a + b + 1); x\right) = {}_2F_1\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}; \frac{1}{2}(a + b + 1); 4x(1-x)\right) $$

जहां x वास्तविक $< \frac{1}{2}$

तथा $\frac{1}{2}(a + b + 1) \neq 0, -1, -2, \ldots\ldots$

(2) $$ {}_2F_1(a, 1-a; c; x) = \left[(1-x)^{c-1}\ {}_2F_1\left\{\frac{1}{2}(c-a), \frac{1}{2}(c + a - 1); c; 4x(1-x)\right\}\right] $$

जहां x वास्तविक $< \frac{1}{2}$

(3) $$ {}_2F_1(a, b; 2b; x) = \left[\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^{-2a} {}_2F_1\left\{a, a - b + \frac{1}{2}; b + \frac{1}{2}; \left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right)^2\right\}\right] $$

(4) $${}_2F_1\left(2a, 2b; a+b+\frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right) = \left[\left\{\frac{\Gamma\left(a+b+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)}\right.\right.$$

$$\left. {}_2F_1\left(a, b; \frac{1}{2}; x^2\right)\right\} + \left\{x\,\frac{\Gamma\left(a+b+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\right.$$

$$\left.\left. {}_2F_1\left(a+\frac{1}{2}, b+\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right)\right\}\right]$$

जहां कोणांक $(1 \pm x)| < \pi,\ a+b+\frac{1}{2} \neq 0, -1, -2, \ldots..$

नोट—इन परिणामों की प्राप्ति को पाठकों के अभ्यास के लिए छोड़ा जा रहा है।

गाउस पराज्यामितीय फलन का आंकिक मानांकन

गाउस पराज्यामितीय फलन में एक चर x व तीन प्राचल a, b तथा c हैं, ये सभी सम्मिश्र संख्याएं भी हो सकते हैं, अतः इनके विभिन्न मानों के लिए एक तालिका का निर्माण बृहदाकार पुस्तक का रूप लेगा जिसको उठाना ही कठिन होगा, जबकि उसमें मानों के लिए अंतर्वेशन की व्यवस्था भी हो। लेकिन ये सब हमें हमारे लक्ष्य से जो फलन के मानांकन से संदर्भित है, हमको डिगा नहीं सकते।

इलेक्ट्रानिक अभिकलित्र द्वारा किसी भी अपेक्षित बिंदु पर फलन का मान निकाला जा सकता है वशर्ते कि हम इसके लिए सही–सही कलन विधि बनाई जा सके, तथा इस बात का भी समुचित ध्यान रखा जाए कि हर स्तर पर गणना की वजह से होने वाली अशुद्धि (जो दशमलव के तीसरे स्थान पर प्राप्त होने वाले अंक के आधे या एक तिहाई से भी कम होगी) जुड़कर कहीं ऐसी संख्या न बन जाए तो मूल संख्या को ही परिवर्तित कर दे।

इन सभी तथ्यों की दृष्टि से हमें एक ऐसे प्रक्रम को ढूंढना होगा जिसमें केवल यादृच्छिक अशुद्धियां हों जो गणनफल के अंतिम अंक में ही आएं। उदाहरणार्थ a, b, c व x सभी को धनात्मक लेने पर ${}_2F_1$ (a, b; c; x) के लिए आंकिक मानांकन इस फलन के श्रेणी प्रसार के विभिन्न पदों को आपस में जोड़कर परास $0 \le x \le \frac{1}{2}$ में प्राप्त किया जा सकता है लेकिन यही मान अगर $\frac{1}{2} < x < 1$ परास में ज्ञात करने हों और सीधे-सीधे संकलन की प्रक्रिया ही की जाए तो संकलित किए जाने वाले पदों की संख्या इतनी बढ़ जाती है कि संचित अशुद्धि सार्थक अंकों को ही निभृत कर देती है। अतः यह बेहतर है कि इस परास में फलन के आंकिक मानांकन हेतु चर x न लेकर (1–x) लिया जाए और गाउस अवकल समी. (1) के हल ${}_2F_1$ (a, b; 1+a+b–c; 1–x) का सहारा लिया जाए।

x=1 पर फलन का मान निकालने के लिए गाउस के प्रमेय का उपयोग आसानी से किया जा सकता है, क्योंकि इस स्थिति में गाउस पराज्यामितीय फलन गामा फलन में परिवर्तित हो जाता है और गामा फलन पहले से ही मानांकित है। यथा–

$$\frac{1}{{}_2F_1(0.1, 0.2; 0.4; 1)} = \frac{\Gamma(0.3)\,\Gamma(0.2)}{\Gamma(0.4)\,\Gamma(0.1)} = 1.46435$$

स्थिति x > 1 में a, b व c के विभिन्न मानों के लिए फलन के अवकल समी. हेतु विलक्षण बिंदु $x = \infty$ पर प्राप्त हलों

$$(-x)^{-a}\ {}_2F_1\left(a, a-c-1; a-b+1; \frac{1}{x}\right)$$

व

$$(1-x)^{-a}\ {}_2F_1\left(a, c-b; 1+a-b; \frac{1}{1-x}\right)$$

का उपयोग किया जा सकता है।

जब a, b व c के धनात्मक मानों के लिए फलन मानांकित हो जाए तो a, b व c के ऋणात्मक मानों के लिए सारणीयन का कार्य पुनरावृत्ति संबंधों की मदद से आसानी से संपादित किया जा सकता है, वशर्ते कि ऐसे मान न लिए जाएं जिन पर फलन को परिभाषित ही न किया जा सके। उदाहरणार्थ

यदि हमें यह ज्ञात हो कि

$${}_2F_1\left[0.1, 0.2; 0.3; 0.2\right] = 1.015$$

तथा ${}_2F_1\left[1.1, 0.2; 0.3; 0.2\right] = 1.545$

तो पुनरावृत्ति संबंध

$$\{c - 2a + (a - b)x\}F + a(1 - x)F(a + 1) = (c - a)F(a - 1)$$

(देखें पृष्ठ 21)

द्वारा हम ज्ञात कर सकते हैं

$${}_2F_1\left[-0.9, 0.2; 0.3; 0.2\right] = 1.024$$

चूंकि फलन a व b में सर्वदा सममित होता है, अतः

$${}_2F_1\ [0.2, -0.9; 0.3; 0.2] = 1.024$$

इस संक्षिप्त विवरण से फलन के मानांकन की पृष्ठभूमि तैयार करने का प्रयत्न किया गया है जिसे जरुरत के मुताविक ढाला जा सकता है।

वैश्लेषिक सांतत्य सूत्र (Analytic continuation formulae)

गाउस अवकल समीकरण के लिए विभिन्न हलों को आपस में रैखिक संबंध पहले ही स्थापित किए जा चुके हैं (देखें पृष्ठ (26-28))। इसी प्रकार का एक रैखिक संबंध हम निम्नलिखित रूप में मान सकते हैं :

$$\left[{}_2F_1(a, b; 1 + a + b - c; 1 - x) = \{C_1 \cdot {}_2F_1(a, b; c; x)\right.$$

$$\left. + C_2 . x^{(1-c)}\ {}_2F_1\ (1 + a - c, 1 + b - c; 2 - c; x)\}\right] \quad \text{समी. (14)}$$

जहां C_1 व C_2 दो स्थिरांक हैं, जिनके मान प्राप्त किए जाने हैं।

ऊपर उदधृत गृहीत रैखिक संबंध के वाएं पक्ष में प्राप्त हल गाउस अवकल समी. (1) के लिए विलक्षण विंदु $x = 1$ के सामीप्य में प्राप्त किया गया है (देखें पृष्ठ 7-8) तथा दाएं पक्ष के दोनों हल विलक्षण विंदु $x = 0$ के सामीप्य में प्राप्त किए गए हैं (देखें पृष्ठ 5-6)।

समी. (14) में $x = 0$ रखने पर

$C_1 = {}_2F_1$ (a, b; 1+a+b–c; 1) वशर्ते कि (1+a+b–c) वास्तविक > वास्तविक (a+b)

$$\therefore C_1 = \frac{\Gamma\ (1 + a + b - c)\ \Gamma\,(1 - c)}{\Gamma\ (1 + a - c)\ \Gamma\,(1 + b - c)} \quad \text{(गाउस के प्रमेय से)}$$

अब समी. में $x = 1$ रखने पर, जबकि c (वास्तविक) > (a+b) वास्तविक हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है :

$$1 = C_1 \cdot {}_2F_1\ (a, b; c; 1) + C_2 \cdot {}_2F_1\ (1{+}a{-}c,\ 1{+}b{-}c;\ 2{-}c;\ 1)$$

जिससे $B = \dfrac{\Gamma\ (1 + a + b - c)\ \Gamma\ (c - 1)}{\Gamma\ (a)\ \Gamma\,(b)}$

और अंततः रैखिक संबंध

$$\left[{}_2F_1\ (a, b; 1 + a + b - c;\ 1 - x) = \left\{\frac{\Gamma\ (1 + a + b - c)\ \Gamma\,(1 - c)}{\Gamma\ (1 + a - c)\ \Gamma\,(1 + b - c)}\right.\right.$$

$$\left.{}_2F_1\ (a, b; c; x)\right\} + \left\{\frac{\Gamma\,(1 + a + b - c)\ \Gamma\,(c - 1)}{\Gamma\ (a)\ \Gamma\,(b)}\ x^{1-c}\right.$$

$$\left.\left.{}_2F_1\ (1 + a - c, 1 + b - c;\ 2 - c;\ x)\right\}\right]$$

वशर्ते कि 1 > c (वास्तविक) > (a+b) वास्तविक

इस परिणाम को फलन ${}_2F_1$ (a, b; c; x) के लिए पूरे सम्मिश्र x-समतल में विस्तारित किया जा सकता है, जबकि ऋणात्मक वास्तविक अक्ष को वर्जित किया जाए और शून्य तथा उन बिंदुओं को नकारते हुए जिन पर फलन अनिर्धारित प्रारूप ले ले; a, b तथा c के समस्त मानों (वास्तविक व सम्मिश्र) के लिए फलन का मान निकाला जाए।

$0 \le |x| \le 1$, के लिए यदि c वास्तविक > (a+b) वास्तविक तथा $x \to 1$ तो

$$C_1 = \frac{\Gamma\ (c)\ \Gamma\,(c - a - b)}{\Gamma\,(c - a)\ \Gamma\,(c - b)}$$

और यदि c (वास्तविक) < (a+b) वास्तविक हो तो x के 1 की ओर अग्रसर होने पर

$$(1-x)^{c-a-b}\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)} \sim C_1 + C_2(1-x)^{c-a-b}$$

[ऑयलर सर्वसमिका के अनुसार

$${}_2F_1(a, b; c; x) = (1-x)^{c-a-b}\,{}_2F_1(c-a, c-b, c-x)]$$

ताकि $C_2 = \dfrac{\Gamma(c)\,\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}$

फिर जब c (वास्तविक) < 1 व $x \to 0$ तो निम्नलिखित प्रकार का समीकरण प्राप्त होता है :

$$1 = C_1H + C_2K, \text{ अर्थात्}$$

$$1 = C_1 \cdot {}_2F_1(a, b; 1+a+b-c; 1) + C_2 \cdot {}_2F_1(c-a, c-b; 1+c-a-b; 1)$$

[दाएं पक्ष के ये दोनों मान विलक्षण बिंदु $x = 1$ के सामीप्य में प्राप्त किए गए हैं, (देखें पृष्ठ 7-8)]

लेकिन जब c (वास्तविक) > 1 तो $x^{1-c} \to \infty$

अतः

$$\left[1 \sim C_1 x^{1-c}\frac{\Gamma(1+a+b-c)\,\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)} + C_2 \cdot \left\{x^{1-c}\frac{\Gamma(1+c-a-b)\,\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}\right\}\right]$$

जो $C_1L + C_2M = 0$ प्रकार का एक समीकरण देता है।

इस सबसे यह निष्कर्ष निकलता है कि शून्य एवं अब तक वर्णित पूर्णांक मानों के अलावा a, b व c के समस्त मानों के लिए दो स्थिरांकों का मान प्राप्त करने के लिए हमारे पास दो समीकरण हैं। इन समीकरणों को निम्नलिखित योजना के अनुसार सारांश में प्रकट किया जा सकता है :

	C वास्तविक > (a+b) वास्तविक	c वास्तविक < (a+b) वास्तविक
C वास्तविक > 1	C_1 = स्थिरांक $C_1L+C_2M=0$	C_2 = स्थिरांक $C_1L+C_2M=0$
C वास्तविक < 1	C_1 = स्थिरांक $C_1H+C_2K=1$	C_2 = स्थिरांक $C_1H+C_2K=1$

संगामी पराज्यामितीय फलन का इसके अवकल समीकरण से निष्कर्षण

पराज्यामितीतय अवकल समीकरण

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + \{c-(a+b+1)x\}\frac{dy}{dx} - aby = 0$$

में x के स्थान पर $\dfrac{x}{b}$ रखने पर

$$\frac{x}{b}\left(1-\frac{x}{b}\right)b^2\frac{d^2y}{dx^2} + \left\{c-(a+b+1)\frac{x}{b}\right\}b\frac{dy}{dx} - aby = 0$$

$$\text{या } x\left(1-\frac{x}{b}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left\{c-\left(1+\frac{1+a}{b}\right)x\right\}\frac{dy}{dx} - ay = 0$$

जो पराज्यामितीय समीकरण (सबसे ऊपर उद्धृत) की ही तरह का है।

अतः इसका हल ${}_2F_1\left(a, b; c; \dfrac{x}{b}\right)$ होना चाहिए।

इस समीकरण में यदि b को अनंत की ओर अग्रसर कराया जाए तो अवकल समीकरण निम्नलिखित रूप में बदल जाएगा।

$$\left[x\frac{d^2y}{dx^2} + (c-x)\frac{dy}{dx} - ay = 0\right] \dots \quad \text{समी. (15)}$$

और इसका हल $\lim_{b\to\infty} {}_2F_1\left(a, b; c; \frac{x}{b}\right)$ होगा, जिसे निम्नलिखित रूप में परिवर्तित किया जा सकता है :

$$\lim_{b\to\infty} {}_2F_1\left(a, b; c; \frac{x}{b}\right) = \lim_{b\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n\ (b)_n}{(c)_n\ n!} \left(\frac{x}{b}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}$$

$$\left[\because \lim_{b\to\infty} \frac{(b)_n}{b^n} = 1\right]$$

$$= \left\{1 + \frac{a}{c}x + \frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\ldots + \frac{a(a+1)\ldots\ldots(a+n-1)}{c(c+1)\ldots\ldots(c+n-1)}\frac{x^n}{n!} + \ldots\right\}$$

$$= {}_1F_1(a; c; x)$$

जिसे पृष्ठ 13 पर दिए गए विवरण के अनुसार संगामी पराज्यामितीय फलन कहा जाएगा और अवकल समी. (15) को संगामी पराज्यामितीय कूमर का अवकल समीकरण कहते हैं। समी. (15) का अवलोकन करने हम पाते हैं कि इसमें x = 0 बिंदु अपनेय विलक्षणता (विचित्रता) दर्शाता है, जिसके सामीप्य में अवकल समीकरण का हल निम्नलिखित घात श्रेणी प्रसार के रूप में भी ज्ञात किया जा सकता है :

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r} \text{ जहां } a_0 \neq 0$$
$$= a_0 x^k + a_1 x^{k+1} + a_2 x^{k+2} + \ldots.$$

यही विधि गाउस अवकल समी. को हल करने में भी लागू की गई थी

ताकि $y' = \sum_{r=0}^{\infty} a_r\ (k+r)\ x^{k+r-1}$ व

$$y'' = \sum_{r=0}^{\infty} a_r\ (k+r)\ (k+r-1)x^{k+r-2}$$

इन मानों को समी. (15) में रखने पर हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है :

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r \left[(k+r)\ (k+r-1) + c\,(k+r)\right] x^{k+r-1}$$

$$-\sum_{r=0}^{\infty} \left[a_r\ (k+r) + a\right] x^{k+r} = 0$$

जो एक तत्समक संबंध (सर्वसमिका) है, अतः x के विभिन्न घातों के गुणांकों का मान शून्य होना चाहिए।

x की न्यूनतम घात के गुणांक को शून्य के बराबर लिखने पर हमें निम्नलिखित घातांकी समीकरण प्राप्त होता है :

$$a_0\ [k\ (k-1) + ck] = 0$$

ताकि k = 0 व (1–c) $[\because a_0 \neq 0]$

x में व्यापक घात x^{k+r} के गुणांक को शून्य के बराबर लिखने पर निम्नलिखित पुनरावर्त्तक सूत्र की प्राप्ति होती है :

$$a_{r+1} = \frac{(k+r+a)}{(k+r+1)\ (k+r+c)}\ a_r$$

अब k के दो विभिन्न मानों के लिए निम्नलिखित दो स्थितियां प्राप्त होंगी :

स्थिति-I k = 0 होने पर

$$a_{r+1} = \frac{(r+a)}{(r+1)\ (r+c)} a_r$$

r = 0, 1, 2, 3..........रखने पर $a_1 = \frac{a}{1.c} a_0,$

$$a_2 = \frac{(a+1)}{2.\ (c+1)} a_1 = \frac{a\,(a+1)}{2!\ c\ (c+1)} a_0, \ldots..$$

जिन्हें गृहीत घात श्रेणी में रखने पर वांछित फल निम्नवत् प्राप्त होता है :

$$y_1 = a_0\left[1+\frac{a}{c}\frac{x}{1!}+\frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!}+\ldots\ldots\right]$$

$$= a_0 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!}$$

और यदि $a_0 = 1$ तो $y = {}_1F_1\,(a;\,c;\,x)$, जो प्रथम प्रकार का संगामी पराज्यामितीय फलन है।

स्थिति-II $K = (1-c)$ होने पर

$$a_{r+1} = \frac{(a-c+1)+r}{(2-c+r)\,(1+r)}\,a_r$$

ताकि $a_1 = \frac{(a-c+1)}{(2-c).1}a_0,\ a_2 = \frac{(a-c+1)\,(a-c+2)}{(2-c)\,(2-c+1)}\,a_0$

$$a_3 = \frac{(a-c+1)\,(a-c+2)\,(a-c+3)}{(2-c)(2-c+1)\,(2-c+2)}\,a_0,\ \ldots\ldots$$

और इस तरह

$$y_2 = a_0x^{(1-c)}\left[1+\frac{(a-c+1)}{(2-c)}\frac{x}{1!}+\frac{(a-c+1)\,(a-c+2)}{(2-c)\,(2-c+1)}\frac{x^2}{2!}+\ldots\right]$$

$$= a_0\,x^{1-c}\ {}_1F_1\left[a-c+1;\,2-c;\,x\right]$$

यदि $a_0 = 1$ रख दिया जाए तो

$$y_2 = x^{1-c}\,{}_1F_1\,(a-c+1;\,2-c;\,x)$$

इस प्रकार संगामी पराज्यामितीय कूमर के अवकल समीकरण का व्यापक हल

$$y = C_1\cdot{}_1F_1(a;c;x) + C_2.x^{1-c}\ {}_1F_1(a-c+1;\,2-c;\,x)$$

जहां C_1 व C_2 समाकल के स्वेच्छाचारी स्थिरांक हैं, जिनके मान, संगामी पराज्यामितीय फलन के विशेष परिस्थितियों में मान प्राप्त करके (यथा $x = 0$) निकाले जा सकते हैं।

नोट—संगामी पराज्यामितीय कूमर के अवकल समीकरण के लिए $x = \infty$ (अनंत) पर भी विलक्षणता प्राप्त होती है, लेकिन यह विलक्षणता अनियमित एवं अव्यवस्थित होने से $x = \infty$ के सामीप्य में अवकल समीकरण का हल प्राप्त नहीं किया गया है।

फलन ${}_1F_1\,(a;\,c;\,x)$ को $M\,(a;\,c;\,x)$, $\Phi\,(a;\,c;\,x)$, आदि रूपों में भी लिखा जाता है। इसी फलन से $U(a;\,c;\,x)$ की व्युत्पत्ति भी की गई है, जिसे निम्नलिखित रूप से लिखा जाता है :

$$U(a;c;x) = \frac{\pi}{\sin\pi c}\left\{\frac{{}_1F_1\,(a;c;\,x)}{\Gamma\,(1+a-c)\,\Gamma\,(c)}\right.$$

$$\left. -x^{1-x}\ \frac{{}_1F_1\ (1+a-c;2-c;x)}{\Gamma\,(a)\,\Gamma\,(2-c)}\right\}$$

फलन $U(a;\,c;\,x)$ को $x^{-a}\ {}_2F_0\left(a,\,1+a-c;\,-\frac{1}{x}\right)$ या $\psi\,(a;\,c;\,x)$ भी लिखा जाता है।

कूमर के अवकल समीकरण के कुल आठ हल दिए गए हैं लेकिन इनका जिक्र करने से पहले हम कूमर के संबंध की व्युत्पत्ति करेंगे और इसी संबंध की मदद से बाकी हल भी निकाले जाएंगे। इस संबंध को निकालने के लिए हमें संगामी पराज्यामितीय फलन के लिए **समाकल सूत्र** की जरूरत पड़ती है, जो निम्नवत है :

$${}_1F_1\ (a;\,c;x) = \frac{\Gamma\,(c)}{\Gamma\,(a)\,\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}\,(1-t)^{c-a-1}\ e^{xt}\,dt$$

जहां $c > a > 0$

हम जानते हैं कि

$${}_1F_1\,(a;c;x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\,(a+n)\,\Gamma\,(c)}{\Gamma\,(c+n)\,\Gamma\,(a)}\frac{x^n}{n!}$$

$$= \frac{\Gamma\,(c)}{\Gamma\,(a)\Gamma\,(c-a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(c-a)\Gamma\,(a+n)}{\Gamma(c-a+a+n)}\frac{x^n}{n!}$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \sum_{n=0}^{\infty} \beta(a+n, c-a) \frac{x^n}{n!}$$

$$\left[\because \text{ वीटा फलन } \beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \right]$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \left\{ t^{a+n-1} (a-t)^{c-a-1}\, dt \right\} . \frac{x^n}{n!}$$

यदि $c > a$

$$\because \beta(m,n) = \beta(n,m) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1}\, dx$$

यदि $m > 0$ व $n > 0$ क्योंकि इन्हीं शर्तों पर समाकल अभिबिंदुग होता है।

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)} \int_0^1 (1-t)^{c-a-1}\, t^{a-1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xt)^n}{n!} \right\} dt$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)} \int_0^1 (1-t)^{c-a-1}\, t^{a-1} e^{xt}\, dt$$

$$\left[\because e^{xt} = \left\{ 1 + xt + \frac{(xt)^2}{2!} + \ldots \frac{(xt)^n}{n!} + \ldots\ldots \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xt)^n}{n!} \right]$$

इस **समाकल सूत्र** में a को (c–a) से तथा x को (–x) से प्रतिस्थापित करने पर

$${}_1F_1(c-a;\ c; -x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma[c-(c-a)]} \int_0^1 (1-t)^{a-1}\, t^{c-a-1}\, c^{-xt} dt$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(a)} \int_1^0 u^{a-1}\, (1-u)^{c-a-1}\, e^{-x(1-u)} (-dx)$$

[t = (1–u) रखने पर]

$$\therefore {}_1F_1\ (c-a; c; -x) = \frac{\Gamma(c)\, e^{-x}}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)} \int_0^1 u^{a-1}\, (1-u)^{c-a-1}\, e^{xu} du$$

$$= e^{-x}\ {}_1F_1\ (a; c; x)$$

अतः ${}_1F_1\ (a; c; x) = e^{x}\ {}_1F_1\ (c-a; c; -x)$

यही कूमर का संबंध है।

कूमर के अवकल समीकरण के आठ हल

कूमर के पराज्यामितीय अवकल समीकरण (15) के लिए तीन हल पहले ही निकाले जा चुके हैं, जो निम्नवत् हैं :

$y_1 = {}_1F_1\ (a; c; x)$

$y_2 = x^{(1-c)}\ {}_1F_1\ (1+a-c; 2-c; x)$

$y_3 = U(a; c; x)$

कूमर के संबंध को प्रयुक्त करने पर

$y_4 = e^x\ {}_1F_1\ (c-a; c; -x)$ [y_1 से]

$y_5 = x^{(1-c)}\ e^x\ {}_1F_1\ (1-a; 2-c; -x)$ [y_2 से]

$y_6 = e^x\ U(c-a; c; -x)$ [y_3 से]

जिस प्रकार कूमर पराज्यामितीय अवकल समीकरण के हल y_1 के साथ–साथ y_2 हल निकाला जाता है, उसी प्रकार y_3 हल के साथ एक और हल भी संभव होगा, जो निम्नवत् है :

$y_7 = x^{(1-c)}\ U(1+a-c; 2-c; x)$

जिस पर कूमर के संबंध को प्रयुक्त करने पर

$y_8 = x^{1-c}\ e^x\ U(1-a; 2-c; -x)$ प्राप्त होता है।

अब हम संगामी पराज्यामितीय फलन की अभिबिंदुगता (अभिसरणता) पर विचार करेंगे।

संगामी पराज्यामितीय फलन के nवें पद को U_n व (n+1) वें पद को U_{n+1} से प्रदर्शित किया जाए तो

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(a)_{n+1}\ (c)_n}{(c)_{n+1}\ (a)_n}\ \frac{x}{n+1}\right|$$

$$\left|\frac{(a+n)\,x}{(c+n)\,(n+1)}\right| \to 0 \text{ जब } n \to \infty$$

अतः $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ x के प्रत्येक मान के लिए से 1 कम होगा।

इसलिए संगामी पराज्यामितीय फलन के लिए श्रेणी प्रसार को अप्रतिबंधित रूप से अभिबिंदुग कहा जाएगा।

अब हम कूमर के संगामी पराज्यामितीय अवकल समीकरण को व्हिटेकर के अवकल समीकरण में रुपांतरित कर इसके लिए हल निकालेंगे।

कूमर के संगामी पराज्यमितीय समीकरण

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (c-x)\frac{dy}{dx} - ay = 0$$

में $y(x) = x^{-\frac{c}{2}} e^{\frac{x}{2}} w(x)$ रखने पर इससे प्रथम घात का अवकल गुणांक हो जाएगा

$$x\left[x^{-\frac{c}{2}} e^{\frac{x}{2}} \frac{d^2w}{dx^2} + 2\left\{-\frac{c}{2}x^{-\frac{c}{2}-1} e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{c}{2}} e^{\frac{x}{2}}\right\}\frac{dw}{dx}\right.$$

$$\left.+w(x)\left\{\frac{c}{2}\left(\frac{c}{2}+1\right)x^{-\frac{c}{2}-2}e^{\frac{x}{2}} - \frac{c}{2}x^{-\frac{c}{2}-1}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{4}x^{-\frac{c}{2}}e^{\frac{x}{2}}\right\}\right]$$

$$+(c-x)\left[x^{-\frac{c}{2}} e^{\frac{x}{2}}\frac{dw}{dx} + w(x)\left\{-\frac{c}{2}x^{-\frac{c}{2}-1} e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{c}{2}} e^{\frac{x}{2}}\right\}\right]$$

$$-ax^{-\frac{c}{2}} e^{\frac{x}{2}}\, w(x) = 0$$

प्राप्त होता है। इसे निम्नलिखित रूप में भी लिखा जा सकता है :

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\frac{c}{2}-a}{x} + \frac{\frac{2c}{4}-\frac{c^2}{4}}{x^2}\right] w(x) = 0$$

जिसमें प्रथम घात के अवकल गुणांक के साथ लगने वाले गुणांक का मान शून्य है।

या $\left\{\frac{d^2w}{dx^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{k}{x} + \frac{\frac{1}{4}-m^2}{x^2}\right] w(x) = 0\right\}$ समी. (16)

जहां पर $k = \frac{c}{2} - a$ व $m = -\frac{1}{2} + \frac{c}{2}$ अर्थात्

$c = (1+2m)$ व $a = \frac{c}{2} - k = \frac{1}{2} + m - k$

समी. (16) के हलों को ही व्हिटेकर संगामी पराज्यामितीय फलन नाम दिया गया है।

यदि 2m न तो इकाई हो और न एक पूर्णांक संख्या हो तो समी. (10) के हल

$$M_{k,m}(x) = x^{\frac{c}{2}} e^{-\frac{x}{2}} w_1(x)$$

$$= x^{\frac{1}{2}+m} e^{-\frac{x}{2}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}+m-k; 1+2m; x\right)$$

[${}_1F_1$ (a; b; x) के सापेक्ष]
समी. 17(a)

और $M_{-k,m}(x) = x^{\frac{c}{2}} e^{-\frac{x}{2}} w_2$ (x

$$= x^{\frac{1}{2}-m} . e^{-\frac{x}{2}} \; {}_1F_1\left(\frac{1}{2}+k-m; 1-2m; x\right)$$

$\left[x^{1-c} \; {}_1F_1 \; (a-c+1; \; 2-c; \; x)\right.$ के सापेक्ष$\left.\right]$

समी. 17(b)

इन दोनों फलनों को व्हिटेकर फलन कहा जाता है।

संगामी पराज्यामितीय फलनों के पदों में विभिन्न फलनों के मान

विशिष्ट फलनों की मूल विशेषता यह है कि इस समूह के समस्त फलन अन्य फलनों के पदों में व्यक्त किए जा सकते हैं। गाउस पराज्यामितीय फलन के संदर्भ में हम इस विशेषता को पहले ही दर्शा चुके हैं; और यहां पर संगामी पराज्यामितीय फलन के पदों में विभिन्न फलनों को प्रदर्शित किया जा रहा है। हम जानते हैं कि

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots$$

$$= 1 + \frac{a}{a}\frac{x}{1!} + \frac{a\,(a+1)}{a\,(a+1)}\frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\frac{(a)_n}{(a)_n}$$

(1) $\therefore \; e^x = {}_1F_1 \; (a; a; x)$

(2) $$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \ldots\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n}{(2)_n}\frac{x^n}{n!} = {}_1F_1 \; (1; 2; x)$$

(3) $$1 - 2x + \frac{1}{2}x^2 = \left[1 + \frac{-2}{1}x + \frac{(-2)\,(-2+1)}{(1)\,(1+2)}\frac{x^2}{2!} + \right.$$

$$\left.\left\{\frac{(-2)\,(-2+1)\,(2+2)}{(1)\,(1+1)\,(1+2)}\frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\right\}\right]$$

$$= {}_1F_1 \; (-2; 1; x)$$

(4) प्रायिकता से संबंधित समाकलों को हल करते समय दो फलन प्रकाश में आते हैं, जिन्हें त्रुटि फलन कहते हैं। इस फलन का प्रसार निम्नवत् दिया जाता है :

$$\text{Erf}\;(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)\;x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}$$

$$= x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n (-x^2)^n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n \; n!}$$

अतः $\text{Erf}\;(x) = x\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -x^2\right)$

(5) हर्मिट वहुपद को निम्नलिखित रूप में लिखा जाता है

$$H_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(2n)!}{k!\,(2n-2k)!}(2x)^{2n-2k}$$

$$= (-1)^n \; (2n)! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \; (2x)^{2k}}{(n-k)!\,(2k)!}$$

$$= (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k \; (2x)^{2k}}{(2k)!}$$

$$= (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k \; (x^2)^k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k \; k!}$$

$$\because (2k)! = 2^{2k}\left(\frac{1}{2}\right)_k k!$$

अत: $$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}\ {}_1F_1\left(-n; \frac{1}{2}; x^2\right)$$

(6) लागेर (Laguere) वहुपदी को निम्नवत् अभिव्यक्त किया जाता है :

$$L_n^{(a)}(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{\Gamma(n+a+1)}{\Gamma(k+a+1)} \frac{(-x)^k}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{(a+1)_n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k\, x^k}{(a+1)_k\, k!}$$

अत: $$L_n^{(a)}(x) = \frac{(a+1)_n}{n!}\ {}_1F_1(-n; a+1; x)$$

(7) हम जानते हैं कि

$$\sin h\,x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots..$$

$$\therefore \frac{\sin hx}{x} = 1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \ldots..$$

व $$\frac{e^x}{x}\sin h\,x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots..\right)\left(1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \ldots..\right)$$

$$= \left\{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots.\right) + \left(\frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x4}{2!3!} + \ldots.\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{x^4}{5!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{2!5!} + \ldots..\right) + \ldots\right\}$$

$$= 1 + x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots..$$

जिसे हम निम्नलिखित रूप में भी अभिव्यक्त कर **सकते हैं** :

$$\frac{e^x}{x}\sin h\,x = 1 + \frac{1}{2}(2x) + \frac{1.2}{2.3}\frac{(2x)^2}{2!} + \frac{1.2.3}{2.3.4}\frac{(2x)^3}{3!} + \ldots..$$

$$= {}_1F_1(1; 2; 2x)$$

इसी प्रकार यह भी सिद्ध किया जा सकता है कि

8) $$\frac{e^{-ix}}{x}\sin x = {}_1F_1(1; 2; -2ix)$$

जिसको सिद्ध करना पाठकों के अभ्यास के लिए छोड़ा जा रहा है।

संगामी पराज्यामितीय फलन का अवकलन

हम जानते हैं कि

$${}_1F_1(a; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d}{dx}\{{}_1F_1(a; c; x)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+1}}{(c)_{m+1}} \frac{x^m}{m!}$$

[(n−1) = m रखने पर]

$$= \frac{a}{c} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a+1)_m}{(c+1)_m} \frac{x^m}{m!}$$

$$\because (a+1)_m = \frac{\Gamma(a+m+1)}{\Gamma(a+1)} = \frac{\Gamma(a+m+1)}{a\,\Gamma(a)} = a\,(a+1)_m$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\{{}_1F_1(a; c; x)\} = \frac{a}{c}\ {}_1F_1(a+1; c+1; x)$$

x के सापेक्ष एक बार और अवकलन करने पर

$$\frac{d^2}{dx^2}\left\{{}_1F_1\ (a;\ c;\ x)\right\} = \frac{a\,(a+1)}{c\,(c+1)}\ {}_1F_1\ (a+2;\ c+2;\ x)$$

और इसी तरह n वार उत्तरोत्तर अवकलन करने पर

$$\frac{d^n}{dx^n}\left\{{}_1F_1\ (a;\ c;\ x)\right\} = \frac{a\,(a+1).....(a+n-1)}{c\,(c+1).....(c+n-1)}\ {}_1F_1\ (a+n;\ c+n;\ x)$$

$$= \frac{(a)_n}{(c)_n}\ {}_1F_1\ (a+n;\ c+n;\ x)$$

इस प्रकार के परिणाम को हम गाउस पराज्यामितीय फलन के अवकलन में भी प्राप्त कर चुके हैं। यहां पर इससे पृथक् एक और परिणाम प्राप्त करने की विधि को समझाकर उसी प्रकार के अन्य परिणामों की सूची दी जाएगी।

हम सिद्‌ध करेंगे कि–

$$x.\frac{d}{dx}\ {}_1F_1\ (a;\ c;\ x) = a\ {}_1F_1\ (a+1; c;\ x) - a\ {}_1F_1\ (a;\ c;\ x)$$

पिछले पृष्ठ में हम सिद्‌ध कर चुके हैं कि

$$\frac{d}{dx}\ {}_1F_1\ (a; c;\ x) = \frac{a}{c}\ {}_1F_1\ (a+1;\ c+1;\ x)$$

अतः
$$x\frac{d}{dx}\ {}_1F_1(a;c;x) = \frac{a}{c}\left\{x + \left(\frac{a+1}{c+1}\right)\frac{x^2}{1!} + \frac{(a+1)\ (a+2)}{(c+1)\ (c+2)}\frac{x^3}{2!}\right.$$

$$+......+\frac{(a+1)(a+2)...(a+1+n-2)}{(c+1)\ (c+2)....(c+1+n-2)}\frac{x^n}{(n-1)!}$$

$$\left.+\frac{(a+1)(a+2)....(a+1+n-1)}{(c+1)(c+2)....(c+1+n-1)}\frac{x^{n+1}}{n!}+...\right\}$$

इसी प्रकार दाएं पक्ष का श्रेणी प्रसार लिखने पर

$$a\left\{1 + \frac{a+1}{c}x + \frac{(a+1)(a+2)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!} + ...\frac{(a+1)(a+2)...(a+1+n-1)}{c(c+1)....(c+n-1)}\right.$$

$$\left.\frac{x^n}{n!}+....\right\} - a\left\{1 + \frac{a}{c}x + \frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!}\right.$$

$$\left.+....\frac{a(a+1)...(a+n-1)}{c(c+1)-(c+n-1)}\frac{x^n}{n!}+...\right\}$$

दोनों पक्षों की तुल्यता सिद्‌ध करने के लिए या तो x के प्रत्येक घात के (कुछ पदों तक) गुणांकों की तुल्यता दिखलाई जा सकती है या फिर व्यापक पद (x^n) के गुणांकों को बराबर दिखाया जा सकता है। हम यहां पर दोनों पक्षों में x^n के गुणांकों की तुल्यता स्थापित करेंगे।

वाएं पक्ष में x^n का गुणांक $= \frac{c\,n}{a\,n!}\frac{(a)_n}{(c)_n}.\frac{a}{c} = \frac{(a)_n}{(c)_n}\ \frac{1}{(n-1)!}$

और दाएं पक्ष में का x^n गुणांक $= \frac{a(a+1)_n}{(c)_n}\ \frac{1}{(n!)} - \frac{a\,(a)_n}{(c)_n}\ \frac{1}{n!}$

$$= \frac{a}{(c)_n\,n!}\left[(a+1)_n - (a)_n\right]$$

$$= \frac{a}{(c)_n\,n!}\left[\frac{(a+n)\ (a)_n}{a} - (a)_n\right]$$

$$= \frac{(a)_n}{(c)_n}\ \frac{1}{(n-1)!}$$

जो परिणाम का सिद्‌ध होना दर्शाता है।

इसी प्रकार के अन्य परिणाम नीचे दिए जा रहे हैं–

(1) $x\frac{d}{dx}\ {}_1F_1\ (a;c;x) = \left\{(c-a)\ {}_1F_1\ (a-1;c;x)\right.$

$$\left.-(c-a-x)\ {}_1F_1\ (a;c;x)\right\}$$

(2) $c\frac{d}{dx}\ {}_1F_1\ (a;c;x) = c\ {}_1F_1\ (a;c;x) - (c-a)\ {}_1F_1\ (a;c+1;x)$

(3) $x\frac{d}{dx}\ {}_1F_1\left(a;c;x\right) = \{(c-1)\ {}_1F_1\ (a;c-1;x)$

$-(c-1)\ {}_1F_1\ (a;c;x)\}$

(4) $x\frac{d}{dx}\ {}_1F_1\ (a;c;x) = \{(c-1)\ {}_1F_1\ (a-1;c-1;x)$

$-(c-1)\ {}_1F_1\ (a;c;x)\}$

संगामी पराज्यामितीय फलन के लिए संसक्त फलन एवं पुनरावृत्ति संबंध

गाउस पराज्यामितीय फलन की ही तरह संगामी पराज्यामितीय फलन के लिए भी संसक्त फलन वर्णित किए जा सकते हैं, जो निम्नवत् होंगे

${}_1F_1\ (a \pm 1;c;x)$ व ${}_1F_1\ (a;c \pm 1;x)$

इनमें से कोई दो फलन यदि किसी संबंध द्वारा ${}_1F_1\ (a;c;x)$ से जोड़ दिए जाएं तो हमें पुनरावृत्ति संबंध की प्राप्ति होगी। हम यहां पर एक पुनरावृत्ति संबंध को सिद्ध करेंगे ताकि पाठकों को इसी प्रकार के अन्य संबंधों (जिनकी सारणी दी जा रही है) को सिद्ध करने में कोई परेशानी न हो।

हम सिद्ध करेंगे कि

$$\left[c(a+x)\ {}_1F_1\ (a;c;x) = ac\ {}_1F_1\ (a+1;c;x)\right.$$

$$\left.-x\left(a-c\right)\ {}_1F_1\ (a;c+1;x)\right]$$

बाएं पक्ष में स्थित पद के लिए x^n का गुणांक

$$= ac\frac{(a)_n}{(c)_n\ n!} + c\frac{(a)_{n-1}}{(c)_{n-1}}\frac{1}{(n-1)!}$$

$$= ac\frac{(a)_n}{(c)_n\ n!} + \frac{c\ \Gamma\ (a+n-1)\ \Gamma\ (c)}{\Gamma\ (a)\ \Gamma\ (c+n-1)}\frac{n}{n!}$$

$$= ac\frac{(a)_n}{(c)_n\ n!} + \frac{cn\ (c+n-1)\ (a)_n}{(a+n-1)\ (c)_n\ n!}$$

$$= \frac{(a)_n}{(c)_n n!}\left[ac + \frac{cn\ (c+n-1)}{(a+n-1)}\right]$$

इसी प्रकार दाएं पक्ष में स्थित पदों के लिए x^n का गुणांक

$$= ac\frac{(a+1)_n}{(c)_n\ n!} - (a-c)\frac{(a)_{n-1}}{(c+1)_{n-1}}\frac{1}{(n-1)!}$$

$$= ac\frac{\Gamma\ (a+n+1)}{a\ \Gamma\ (a)(c)_n\ n!} - (a-c)\frac{\Gamma\ (a+n-1)\ c\,\Gamma\ (c)}{\Gamma\ (a)\ \Gamma\ (c+n)}\frac{n}{n!}$$

$$= \left\{\frac{c\ (a+n)\ (a)_n}{(c)_n\ n!} - (a-c)\frac{cn}{(a+n-1)}\right\}$$

$$= \frac{(a)_n}{(c)_n n!}\left[ac + cn - \frac{(a-c)\ cn}{(a+n-1)}\right]$$

$$= \frac{(a)_n}{(c)_n n!}\left[ac + \frac{cn\ (c+n-1}{(a+n-1)}\right]$$

दोनों पक्षों में x^n के गुणांक बराबर होने से संबंध के स्थापित होने की पुष्टि हो जाती है।

अन्य संबंध निम्नवत् होंगे—

(1) $\{(c-a)\ {}_1F_1\ (a-1;c;x) + (2a-c+x)\ {}_1F_1\ (a;c;x)$

$-a\ {}_1F_1\ (a+1;c;x)\} = 0$

(2) $\{c(c-1)\ {}_1F_1\ (a;c-1;x) + c(1-c-x)\ {}_1F_1\ (a;c;x)$

$+x\ (c-a)\ {}_1F_1\ (a;c+1;x)\} = 0$

(3) $\{(1+a-c)\ {}_1F_1\ (a;c;x) - a\,{}_1F_1\ (a+1;c;x)$

$+(c-1)\ {}_1F_1\ (a;c-1;x)\} = 0$

(4) $c\,{}_1F_1\,(a; c; x) - c\,{}_1F_1\,(a-1; c; x) - x\,{}_1F_1\,(a; c+1; x) = 0$

(5) $$\{(a-1+x)\,{}_1F_1\,(a; c; x) + (c-a)\,{}_1F_1\,(a-1; c; x) + (1-c)\,{}_1F_1\,(a; c-1; x)\} = 0$$

(6) $$\{c(1-c+x)\,{}_1F_1\,(a; c; x) + c(c-1)\,{}_1F_1\,(a-1; c-1; x) - ax\,{}_1F_1\,(a+1; c+1; x)\} = 0$$

${}_1F_1\,(a; c; x)$ से फलन $\cup\,(a; c; x)$ की व्युत्पत्ति की गई है, जो निम्नलिखित प्रारुप में वर्णित है :

$$\cup(a; c; x) = \frac{\pi}{\sin \pi c}\left\{\frac{{}_1F_1\,(a; c; x)}{\tau\,(1+a-c)\ \tau\,(c)} - x^{(1-c)}\,\frac{{}_1F_1\,(1+a-c; 2-c; x)}{\tau\,(a)\ \tau\,(2-c)}\right\}$$

इस फलन के लिए भी संगामी पराज्यामितीय फलन की ही तरह पुनरावृत्ति संबंध प्राप्त किए जा सकते हैं, जिनकी सूची नीचे दी जा रही है—

(1) $$\{\cup(a-1; c; x) + (c-2a-x)\cup(a; c; x) + a(1+a-c)\cup(a+1; c; x)\} = 0$$

(2) $$\{(c-a-1)\cup(a, c-1; x) + (1-c-x)\cup(a; c; x) + x\cup(a; c+1; x)\} = 0$$

(3) $\cup(a; c; x) - a\cup(a+1; c; x) - \cup(a; c-1; x) = 0$

(4) $(c-a)\cup(a; c; x) + \cup(a-1; c; x) - x\cup(a; c+1; x) = 0$

(5) $$\{(a+x)\cup(a; c; x) - x\cup(a; c+1; x) + a(c-a-1)\cup(a+1; c; x)\} = 0$$

तथा

(6) $$\{(a+x-1)\cup(a; c; x) - \cup(a-1; c; x) + (1+a-b)\cup(a; c-1; x)\} = 0$$

व्हिटेकर अवकल समीकरण (16) के लिए प्राप्त हलों (जो समी. 17 (a) व **17 (b) द्वारा** दिए गए हैं (देखें पृष्ठ 54-55) के लिए दो पुनरावृत्ति संबंध **निम्नलिखित रूप में** होंगे :

(1) $$2m\,M_{k-\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}(x) - x^{\frac{1}{2}}\,M_{k.m}(x) = 2m\,M_{k+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}(x)$$

(2) $$\{(1+2m+2k)\,M_{k+1,m}(x) - (1+2m-2k)\,M_{k-1,m}(x) = 2(2k-x)\,M_{k.m}(x)\}$$

संगामी पराज्यामितीय फलन में यदि c व x को स्थिर कर दिया जाए तो **इससे सीमांत स्थिति** में बेसल फलन की उत्पत्ति होती है, जो निम्नलिखित **रूप से प्रकट किए** जा सकते हैं :

(1) $$\lim_{a\to x}\left\{\frac{{}_1F_1\left(a; c; \frac{x}{a}\right)}{\Gamma\,(c)}\right\} = x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}c}\ \Gamma_{c-1}\left(2\sqrt{x}\right)$$

(2) $$\lim_{a\to x}\left\{\frac{{}_1F_1\left(a; c; -\frac{x}{a}\right)}{\Gamma\,(c)}\right\} = x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}c}\ \tau_{c-1}\left(2\sqrt{x}\right)$$

जहां I_c **(x)** अपरिवर्तित बेसल फलन है जो अवकल समीकरण

$$x^2\,\frac{d^2y}{dx^2} + x\,\frac{dy}{dx} - (x^2 + c^2)\,y = 0$$

का एक हल है। इसके दूसरे हल k (x) के लिए निम्नलिखित संबंध स्थापित किया गया है :

(3) $$\lim_{a\to x}\left\{\Gamma\,(1+a-c)\cup(a; c; \frac{x}{a})\right\} = 2x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}c}\ K_{c-1}\left(2\sqrt{x}\right)$$

संगामी पराज्यामितीय फलन के लिए आंकिक मानांकन

आंकिक मानांकन के लिए आवश्यक शर्तों का वर्णन करते हुए इसके लिए पृष्ठभूमि गाउस पराज्यामितीय फलन के आंकिक मानांकन में तैयार की गई है। हम यहां पर प्राचलों **a** व **c** तथा चर **x** के विभिन्न मानों के लिए फलन $_1F_1$ (a; c; x) का सीधे मान ज्ञात करेंगे।

उदाहरण 1

माना हमें $_1F_1$ (.3; .2; –.1) का मान सात दशमलव स्थानों तक ज्ञात करना है।

कूमर के संबंध का उपयोग करने पर

$$_1F_1\,(.3;\,.2;-.1) = e^{-.1}\ {}_1F_1\,(-.1;\,.2;\,.1)$$

चरघातांकी फलन की सारणी का उपयोग करने पर

$$_1F_1\,(.3;\,.2;-.1) = .8578490$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि चर **x** के ऋणात्मक मान होने पर कूमर के संबंध का अनुप्रयोग कर **a** तथा **c** के बड़े मानों के लिए भी संगामी पराज्यामितीय फलन का आंकिक मान प्राप्त किया जा सकता है। पुनरावृत्ति संबंध भी इस कार्य में महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं जो नीचे दिए गए उदाहरण से स्पष्ट होता है।

उदाहरण 2

माना हमें $_1F_1$ (–1.3; 1.2; .1) का मान निकालना है तो इसके लिए a=–.3, c=.2 लेकर पुनरावर्त्तक संबंध

$$(c-a)\ {}_1F_1\,(a-1;\,c;\,x) + (2a-c+x)\ {}_1F_1\,(a;\,c;\,x) - a\ {}_1F_1\,(a+1;\,c;\,x) = 0$$

का उपयोग करने पर

$$_1F_1\,(-1.3;\,.2;\,.1) = 2[.7\ {}_1F_1\,(-.3;\,.2;\,.1) - .3\ {}_1F_1\,(.7;\,.2;\,.1)] = .3582123$$

इसी प्रकार पुनरावृत्ति संबंध

$$\left[c\,(a+x)\,{}_1F_1\,(a;\,c;\,x) = ac\ {}_1F_1\,(a+1;\,c;\,x) - x\,(a-c)\ {}_1F_1\,(a;\,c+1;\,x)\right]$$

का उपयोग करने पर

$$_1F_1\,(-1.3;\,1.2;\,.1) = [.26\ {}_1F_1\,(-.3;\,.2;\,.1) - .24\ {}_1F_1\,(-1.3;\,.2;\,.1)]\,/\,_{.15}$$

जब a = –1.3 व c = .2 लिया जाए

ताकि

$$_1F_1\,(-1.3;\,1.2;\,.1) = .8924108$$

इसी तरह से यदि a = –.3 व c = .2 लिया जाए तो पृष्ठ (63) पर दिए गए पुनरावर्त्तक संबंध (5) से

$$_1F_1\,(-1.3;\,1.2;\,.1) = [(.2)\ {}_1F_1\,(-.3;\,.2;\,.1) + (1.2)\ {}_1F_1\,(-.3;\,1.2;\,.1)]\Big/_{1.5}$$

=.8924108 प्राप्त हो जाता है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि पृष्ठ (62-63) पर दिए गए पुनरावर्त्तक संबंधों के अनुप्रयोग से फलन $_1F_1$ (a; c; x) के मान निम्नलिखित परास में ज्ञात किए जा सकते हैं :

$$-10 \le a \le 10,\ -10 \le c \le 10,\ -10 \le x \le 10$$

यहां पर यह तथ्य ध्यान देने योग्य है कि सभी पुनरावर्त्तक संबंध अचल रहेंगे—केवल निम्नलिखित दो स्थितियों को छोड़कर

(i) यदि $a < 0, c < 0$ और $|a| > |b|, x > 0$

(ii) $b < a, b < 0, |b-a| > |b|$ व $x < 0$

अर्थात् उन स्थितियों में जहां पर दोलनों का मान बहुत ज्यादा हो जाता है, विशेषकर तब जब |x| भी बहुत बड़ा हो।

पुनरावृत्ति संबंधों का उपयोग वर्जित होगा यदि c = –n # .1, जहां फलन का मान आंकिक रूप से बहुत बड़ा हो जाता ह। इन स्थितियों के लिए अंतर्वेशन भी लागू नहीं किया जा सकता है। हम यह कह सकते हैं कि ${}_1F_1$ (a; c; x) का मानांकन बिंदुओं a = –m, c = –n जहां पर $m \leq n$, के सामीप्य में नहीं हो सकता, क्योंकि इन बिंदुओं के सामीप्य में a, c व x के बहुत छोटे से अंतरों के लिए ${}_1F_1$ (a; c; x) के आंकिक मानों में बहुत ज्यादा परिवर्तन हो जाते हैं।

हम यहां पर एक ऐसा उदाहरण भी दे रहे हैं जिसमें प्राचलों a व c तथा चर x के मानों के लिए फलन अवर्णित हो जाता है।

उदाहरण 3

माना हम ${}_1F_1$ (a; b; x) का आंकिक मान (–1; –1; x) पर ज्ञात करना चाहते हैं।

हम जानते हैं कि जब a= –1 तो x के समस्त मानों के लिए

$${}_1F_1\ (-1;\ c;\ x) = 1 - \frac{x}{c}$$ [इससे आगे के पदों का मान शून्य हो जाएगा]

अतः $\lim_{c\to -1}\ {}_1F_1 - (-1;\ c;\ x) = (1 + x)$

लेकिन हम पृष्ठ (55) पर दिखा चुके हैं कि

${}_1F_1$ (a; a; x) = e^x

$\therefore \lim_{c\to -1}\ {}_1F_1(-1;\ c;\ x) = e^x$ जो ऊपर उद्धृत मान का विरोध करता है।

गाउस पराज्यामितीय फलन एवं संगामी पराज्यामितीय फलन के बारे में विस्तारपूर्वक वर्णन करने के बाद हम यह बताना चाहेंगे कि इन फलनों के व्यापकीकरण के उपरांत बहुगुण पराज्यामितीय फलनों की खोज की जा चुकी है। हम यहां पर इनके बारे में भी वर्णन करना ठीक समझते हैं।

तात्कालिक व्यापकीकरण यह बताता है कि पराज्यमितीय श्रेणी के अंश और हर (दोनों जगह) प्राचलों की संख्या बढ़ा दी जाए ताकि हमें एकल

व्यापकीकृत पराज्यामितीय फलन प्राप्त हो जाए जिसका श्रेणी प्रसार निम्नवत् हो।

$${}_pF_q\left[((a));\ ((c));\ x\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((a,n))\ x^n}{((c,n))\ n!}$$

जहाँ ((a)) प्राचलों के अनुक्रम a_1, a_2,......a_A इत्यादि को दर्शाता है। इस प्रकार का संकेतन सर्व प्रथम लूसी जोन स्लेटर द्वारा दिया गया।

फलन ${}_pF_q$ का क्रम संगत रैखिक अवकल समीकरण के क्रम से प्राप्त होता है और यह p या (q+1) के बृहत्तर मानों में से एक होता है। कई सुप्रसिद्ध फलन एकल चर वाले व्यापकीकृत पराज्यामितीय फलन के विशिष्ट उदाहरण होते हैं; दो सरल उदाहरण चरघातांकी एवं द्विपद फलन हैं जिन्हें क्रमशः ${}_0F_0$ (; ; x) और ${}_1F_0$ (a; ; x) से प्रदर्शित किया जाता है।

फलन ${}_pF_q$ के अभिबिंदुग होने का परीक्षण हम संगामी पराज्यामितीय फलन के अभिबिंदुगता (अभिसारिता) परीक्षण हेतु प्रयुक्त विधि (देखें पृष्ठ 52-53) का उपयोग करते हुए करेंगे। हम देखते हैं कि

(i) यदि $p \leq q$ तो श्रेणी समस्त मानों (चाहे वे वास्तविक हों अथवा सम्मिश्र) के केवल अभिबिंदुग (अभिसारिता) होगी।

(ii) यदि p = q + 1 तो श्रेणी प्राचलों के समस्त मानों के लिए अभिबिंदुग होगी, यदि |x| < 1. यदि x = 1 अथवा x = –1 हो तो श्रेणी अभिबिंदुग होगी, वशर्ते कि क्रमानुसार

$$\left(\sum_{j=1}^{q} c_j - \sum_{j=1}^{p} a_j\right) \text{ वास्तविक} > 0$$

और $$\left(\sum_{j=1}^{q} c_j - \sum_{j=1}^{p} a_j\right) \text{ वास्तविक} > -1$$

(iii) यदि p > q + 1 हो तो श्रेणी अभिबिंदुग होगी, यदि x = 0

जब अंश के प्राचलों में से कोई एक अथवा एक से ज्यादा प्राचल ऋणात्मक पूर्णांक हो तो श्रेणी कुछ पदों के बाद समाप्त हो जाएगी और इस

प्रकार यह व्यापकीकृत पराज्यामितीय फलन का केवल रीतिक निरुपण करेगा।

ऐपेल के दोहरे पराज्यामितीय फलन

एकल पराज्यामितीय फलनों के सफल निर्माण ने गणितज्ञों को यह सोचने पर मजबूर किया कि क्या दोहरी श्रेणी के पराज्यामितीय फलनों का निर्माण संभव है? एपेल ने इस दिशा में कार्य किया और नीचे वर्णित चार फलनों को परिभाषित किया, जो उन्हीं के नाम पर जाने जाते हैं।

$$(1)\quad \left[F_1(a,b,b';c;x,y)=\left\{\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a,m+n)\,(b,m)(b',n)}{(c,\,m+n)}\frac{x^m\,y^n}{m!\,n!}\right\}\right]$$

$$(2)\quad \left[F_2\,(a,\,b,\,b';\,c,\,c';\,x,\,y)=\left\{\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a,\,m+n)\,(b,\,m)\,(b',\,n)}{(c,m)\,(c',\,n)}\frac{x^m\,y^n}{m!\,n!}\right\}\right]$$

$$(3)\quad \left[F_3\,(a,\,a',\,b,\,b';\,c;\,x,\,y)=\left\{\sum_{m,\,n=0}^{\infty}\frac{(a,m)(a',n)\,(b,m)(b',n)}{(c,m+n)}\frac{x^m\,y^n}{m!\,n!}\right\}\right]$$

$$(4)\quad \left[F_4\,(a,\,b;\,c,\,c';\,x,\,y)=\left\{\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a,\,m+n)\,(b,m+n)}{(c,m)\,(c',n)}\frac{x^m\,y^n}{m!\,n!}\right\}\right]$$

ये सभी फलन गाउस पराज्यामितीय फलन के व्यापकीकृत फलन हैं।

ऐपेल ने सबसे पहले इन्हें प्राप्त करने के लिए दो गाउस फलनों का सीधा गुणनफल निम्न प्रकार प्राप्त किया।

$$\left[{}_2F_1\,(a,\,b;\,c;\,x)\;{}_2F_1\,(a',\,b';\,c';\,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a,\,m)\,(a',\,n)\,(b,\,m)\,(b',\,n)}{(c,m)\,(c',\,n)}\frac{x^m y^n}{m!\,n!}\right]$$

और गुणनफल के हर जोड़े को (a, m) (a', n) को मिश्रित रूप (a, m+n) से प्रदर्शित किया।

ऊपर उद्धृत चार फलनों के अतिरिक्त हमारे पास निम्नलिखित दोहरी श्रेणी भी हो सकती है

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a,\,m+n)\,(b,\,m+n)}{(c,\,m+n)}\frac{x^m\;y^n}{m!\,n!}$$

द्विपद प्रमेय का सीधा अनुप्रयोग उपर लिखे गए परिणाम को फलन ${}_2F_1$ (a, b; c; x+y) में व्यक्त करता है, जो पहले से ही ज्ञात है।

अप्रतिबंधित रूप से अभिबिंदुग दोहरी श्रेणी

$$\left[\sum_{m,n=0}^{\infty}f\,(m+n)\,\frac{x^m\,y^n}{m!\;n!}\right]\qquad \text{समी. (18)}$$

जहां f (m + n) कोई ऐसा फलन है जिसमें अक्षांकों के संकलन का योग प्रदर्शित है न कि इनको अलग–अलग व्यक्त किया गया है।

समी. (18) में N = (m+n) रखने पर यह निम्न रूप में बदल जाता है :

$$\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{N}\frac{f\,(N)\,x^m\;y^{N-m}}{(N-m)!\,m!}=\sum_{N=0}^{\infty}f\,(N)\,y^N\sum_{M=0}^{N}\frac{1}{(N-m)!\,m!}\left(\frac{x}{y}\right)^m$$

$$=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{f\,(N)\,y^N}{N!}\sum_{m=0}^{N}\frac{(-N,\,m)}{m!}\left(-\frac{x}{y}\right)^m$$

m में व्यक्त भीतरी श्रेणी को यदि द्विपद प्रमेय से संकलित किया जाए तो

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} f(m+n)\,\frac{x^m\,y^n}{m!\,n!} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{f(N)}{N!}\,(x+y)^N$$

की प्राप्ति होती है। यदि ऐपल फलनों के अंश में प्राचलों के संयोग से ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त हो जाएं तो दोहरी श्रेणी कुछ पदों बाद समाप्त हो जाएगी। उदाहरणार्थ हम बता सकते हैं कि F_1 के संदर्भ में यदि $a = -N$ तो N घात के एक वहुपद की प्राप्ति होगी और यदि $b = -m$ व $b' = -N$ तो (M+N) घात की बहुपदी प्राप्त हो जाएगी। चारों स्थितियों में वर्णित ऐपल श्रेणी गाउस फलन में परिवर्तित हो जाएगी यदि इनमें से कोई एक चर शून्य हो जाए।

ऐपेल श्रेणी में अभिविंदुगता का परास

हम यहां पर ऐपल फलन F_2 के लिए अभिबिंदुगता की स्थितियों पर विचार करेंगे ताकि बाकी फलनों क लिए संबंधित शर्ते प्राप्त की जा सकें।

फलन F_2 के व्यापक पद को निम्नलिखित प्रकार से लिखा जा सकता है।

$$A_{m,n}\,x^m y^n = \frac{(a,m+n)\;(b,m)\;(b',n)}{(c,m)\;(c',n)\;m!\,n!}\,x^m\,y^n$$

$$= \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c')}{\Gamma(a)\;\Gamma(b)\;\Gamma(b')} \cdot \frac{\Gamma(a+m+n)\,\Gamma(b+m)\,\Gamma(b'+n)}{\Gamma(c+m)\,\Gamma(c'+n)\,\Gamma(1+m)\,\Gamma(1+n)}\,x^m\,y^n$$

k के बृहद मानों के स्टर्लिंग सूत्र

$$\tau(\lambda+k) \sim (2\pi)\Big/_{2.k}\, k+\lambda-\frac{1}{2}\; e^{-k}$$

का अनुप्रयोग करने पर हमें ज्ञात होता है कि

$$\lim_{m,n\to\infty}\left[(m+n)^{1-a}\;m^{c-b}\;n^{c'-b'}\;m!\,n!\,A_{m,n}\Big/_{(m+n)!}\right]$$

$$= \frac{\Gamma(c)\;\Gamma(c')}{\Gamma(b)\;\Gamma(b')\;\Gamma(a)}$$

यह मानते हुए कि a, b, b ', c व c' के वास्तविक अंशों को क्रमशः a_1, b_1, b'_1, c_1 व c'_1 से व्यक्त किया जाए और N एक ऐसा पूर्णांक है, जिसके लिए

$$N > \left|\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c')}{\Gamma(b)\;\Gamma(b')\;\Gamma(a)}\right| \quad \text{है}$$

अब m और n के पर्याप्त बड़े मानों के लिए

$$\left[\left|A_{m,n}\;x^m\,y^n\right| < N\,\frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,(m+n)^{a_1-1}\;m^{b_1-c_1}\,n^{b'_1-c'_1}\;|x|^m\;|y|^n\right]$$

और यदि $\in$ एक धनात्मक संख्या को व्यक्त करे जो b_1-c_1 और $b'_1-c'_1$ में बृहत्तर संख्या से बड़ा हो तो

$$m^{b'_1-c'_1}\,n^{b_1-c_1} < m^{\epsilon}\;n^{\epsilon} \le \frac{(m+n)^{2\epsilon}}{4^{\epsilon}}$$

जहां कहीं से

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\left|A_{m,n}\,x^m\;y^n\right| < \left\{\frac{N}{4^{\epsilon}}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(m+n)!}{m!\;n!}\right.$$

$$\left.(m+n)^{2\epsilon+a_1-1}\;\;|x|^m\;\;|y|^n\right\}$$

$$< \frac{N}{4^{\epsilon}}\;\sum_{r=0}^{\infty}\; r^{2\epsilon+a_1-1}\left(|x| + |y|\right)^r$$

जहां $r = m + n$

और यह श्रेणी अभिबिंदुग होगी यदि $|x| + |y| < 1$

अतः फलन F_1 इस परास में अभिबिंदुग होगा। इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि फलन F_1 व F_3 अभिबिंदुग होंगे, यदि $|x| < 1$ और $|y| < 1$ तथा फलन F_4 अभिबिंदुग होगा, यदि $\left|\sqrt{x}\right| + \left|\sqrt{y}\right| < 1$

ऐपेल फलनों का समाकल निरूपण

गाउस फलन के लिए समाकल सूत्र की व्युत्पत्ति हम पृष्ठ 13-14 पर कर चुके हैं। इसी प्रकार पर एपेल फलनों का समाकल निरूपण भी प्राप्त किया जा सकता है ताकि संबंधित फलनों को अभिबिंदुगता परास के बाहर श्रेणी निरूपण द्वारा परिभाषित किया जा सके।

फलन F_1, F_2 व F_3 के लिए दोहरे समाकल ऑयलर समाकलों के अनुवर्ती रूप में निम्न प्रकार से प्राप्त किए जा सकते हैं :

$$\int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}\,du = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

और $$\iint u^{p-1}\,v^{q-1}(1-u-v)^{r-1}\,du\,dv = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}$$

जहां पर दोहरे समाकल को क्षेत्र

$u \geq 0, \quad v \geq 0, \quad 1-u-v \geq 0$

में लिया गया है।

इस प्रकार हमें निम्नलिखित व्यंजक की प्राप्ति होती है :

$$\frac{\Gamma(b)\,\Gamma(b')\,\Gamma(c-b-b')}{\Gamma(c)} F_1\,(a, b, b'; c; x, y)$$

$$\iint u^{b-1}\,v^{b'-1}(1-u-v)^{c-b-b'-1}(1-ux-vy)^{-a}\,du\,dv$$

जहां पर $u \geq 0, \quad v \geq 0, \quad i-u-v \geq 0$

तथा b (वास्तविक), b' (वास्तविक), (c–b–b') वास्तविक > 0

इसी प्रकार

$$\frac{\Gamma(b)\,\Gamma(b')\,\Gamma(c'-b')}{\Gamma(c)\,\Gamma(c')} F_2\,(a, b, b'; c, c'; x, y)$$

$$= \int_0^1\int_0^1 u^{b-1}\,v^{b'-1}(1-u)^{c-b-1}(1-v)^{c'-b'-1}(1-ux-vy)^{-a}\,du\,dv$$

जहां पर b (वास्तविक), b' (वास्तविक), (c–b) वास्तविक तथा (c'–b') वास्तविक > 0

तथा

$$\frac{\Gamma(b)\,\Gamma(b')\,\Gamma(c-b-b')}{\Gamma(c)} F_3\,(a, a', b, b'; c; x, y)$$

$$= \iint u^{b-1}\,v^{b'-1}(1-u-v)^{c-b-b'-1}(1-ux)^{-a}(1-vy)^{-a'}\,du\,dv$$

जहां पर $u \geq 0, \quad v \geq 0, \quad (1-u-v) \geq 0,$

b (वास्तविक), b' (वास्तविक), (c–b–b') वास्तविक > 0

फलन F_1 के लिए पिकार्ड द्वारा एकल समाकल का निरूपण निम्नवत् किया गया है :

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} F_1\,(a, b, b'; c; x, y)$$

$$= \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-ux)^{-b}(1-uy)^{-b'}\,du$$

जहां पर a (वास्तविक) व (c–a) वास्तविक > 0

फलन F_4 के लिए समाकल निरूपण प्राप्त करने के लिए हमें इस फलन को दो गाउस पराज्यामितीय फलनों के गुणनफल के रूप में प्रदर्शित करना पड़ेगा जो निम्नलिखित संबंध से सम्भव है।

$$F_4\,(a, b; c, c'; x(1-y), y(1-x))$$

$$= \Bigg[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r\,(b)_r\,(1+a+b-c-c')_r}{r!\,(c)_r\,(c')_r} x^r y^r$$

$${}_2F_1\,(a+r, b+r; c+r; x).\ {}_2F_1\,(a+r, b+r; c'+r; y)\Bigg]$$

जिसमें गाउस पराज्यामितीय फलन के लिए निकाले गए समाकल सूत्र (देखें पृष्ठ (13-14), समी. (7)) का प्रतिस्थापन करने पर

$$F_4 = F_4\,((a, b; c; c'; x(1-y), y(1-x))$$

$$= \left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r\ (b)_r\ (1+a+b-c-c')_r}{(1)_r\ (c)_r\ (c')_r} x^r y^r \right.$$

$$\left\{ \frac{\Gamma(c+r)}{\Gamma(a+\Gamma)\ \pi\ (c-a)} \int_0^1 u^{a+r-1} (1-u)^{c-a-1} (1-ux)^{-b-r}\, du \right\}$$

$$\left. \left\{ \frac{\Gamma(c'+r)}{\Gamma(b+r)\ \Gamma(c'-b)} \int_0^1 v^{b+r-1} (1-v)^{c'-b-1} (1-vy)^{-a-r}\, dv \right\} \right]$$

वशर्ते कि c' (वास्तविक) > b (वास्तविक) > 0

और c (वास्तविक) > a (वास्तविक) > 0

संकलन एवं समाकल के क्रम को परस्पर बदलने पर

$$F_4 = \left[\cdot\Gamma \left[\begin{matrix} c, & c' \\ a, b, & c-a, & c'-b \end{matrix} \right] \right.$$

$$\cdot \int_0^1 \int_0^1 u^{a-1}\ b^{b-1}\ (1-u)^{c-a-1}\ (1-v)^{c'-b-1}\ (1-ux)^{-b}\ (1-vy)^{-a}$$

$$\left. \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1+a+b-c-c')_r\ (uvxy)^r}{(1)_r\ (1-ux)^r\ (1-vy)^r}\, du\, dv \right]$$

संकलन के लिए द्विपद प्रमेय का अनुप्रयोग करने पर अंत्य परिणाम निम्नलिखित रूप में प्राप्त होगा :

$$F_4\ (a, b;\ c, c';\ x\,(1-y),\ y\,(1-x)$$

$$\left[\Gamma \left[\begin{matrix} c, & c' \\ a, b, & c-a, & c'-b \end{matrix} \right] \right.$$

$$\cdot \int_0^1 \int_0^1 u^{a-1}\ b^{b-1}\ (1-u)^{c-a-1}\ (1-v)^{c'-b-1}\ (1-ux)^{-b}\ (1-vy)^{-a}$$

$$\left. \cdot \left\{ \frac{(1-uvxy)}{(1-ux)\ (1-uy)} \right\}^{c-c'-a-b-1} du\, dv \right]$$

वशर्ते कि |x| व |y| के मान इतने छोटे हों कि दोहरा समाकल अभिबिंदुग हो सके।

सीमांत रूपः हंवर्ट के फलन

हम गाउस पराज्यामितीय फलन के लिए सीमांत स्थिति में संगामी पराज्यामितीय कूमर के फलन की व्युत्पत्ति कर चुके हैं, इसी प्रकार एपेल फलनों के लिए सीमांतता की स्थिति में हम्बर्ट द्वारा सात नए फलनों का आविष्कार किया गया, जो निम्नवत् है :

$$\lim_{\epsilon \to 0} F_1 \left(a, b, \frac{1}{\epsilon}; c; \infty x, \epsilon y \right) = \Sigma \frac{(a, m+n)\ (b, m)}{(c, m+n)} \frac{x^m\ y^n}{m!\ n!}$$

$$= \Phi_1\ (a, b; c; x, y)$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} F_1 \left(\frac{1}{\epsilon}, b, b'; c; \epsilon x, \epsilon y \right) = \Sigma \frac{(b, m)\ (b', n)}{(c, m+n)} \frac{x^m\ y^n}{m!\ n!}$$

$$= \Phi_2\ (b, b'; c; x, y)$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} F_1 \left(\frac{1}{\epsilon}, b, \frac{1}{\epsilon}; c, \ \epsilon x, \epsilon^2 y \right) = \Sigma \frac{(b, m)}{(c, m+n)} \frac{x^m\ y^n}{m!\ n!}$$

$$= \Phi_3\ (b; c; x, y)$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} F_2 \left(a, b, \frac{1}{\epsilon}; c, c';\ x,\ \epsilon y \right) = \Sigma \frac{(a, m+n)}{(c, m)\ (c', n)} \frac{x^m\ y^n}{m!\ n!}$$

$$= \psi_1\ (a, b; c, c'; x, y)$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} F_2 \left(a, \frac{1}{\epsilon}; \frac{1}{\epsilon}; c, c'; \epsilon x,\ \epsilon y \right) = \Sigma \frac{(a, m+n)}{(c, m)\ (c', n)} \frac{x^m\ y^n}{m!\ n!}$$

$$= \psi_2\ (a; c, c'; x, y)$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} F_3 \left(a, a'\ b, \frac{1}{\epsilon}; c; x, \epsilon y \right) = \Sigma \frac{(a, m)\ (a', n)\ (b, m)}{(c, m+n)} \frac{x^m\ y^n}{m!\ n!}$$

$$= E_1\ (a, a'; b; c; x, y)$$

तथा

$$\lim_{\epsilon\to 0} F_3\left(a, \frac{1}{\epsilon}, b, \frac{1}{\epsilon}; c; x, \epsilon^2 y\right) = \Sigma \frac{(a, m)\ (b, m)}{(c, m+n)} \frac{x^m y^n}{m!\, n!}$$

$$= E_2 (a, b; c; x, y)$$

यहां पर यह तथ्य ध्यान देने योग्य है कि इन सब में एकल चर वाले फलन सम्मिलित नहीं किए गए हैं।

हम्बर्ट द्वारा फलन Φ_1 व Φ_2 के लिए समाकल निरूपण निम्नवत् किए गए हैं:

$$\Phi_1 (a, b; c; x, y) = \frac{\Gamma (c)}{\Gamma (a)\ \Gamma (c-a)} \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{c-a-1} e^{uy}\, du$$

जहां पर a (वास्तविक) और (c–a) (वास्तविक) > 0 और

$$\Phi_2 (b, b'; c; x, y) = \left\{\frac{\Gamma (c)}{\Gamma (b)\ \Gamma (b')\ \Gamma (c-b-b')}\right.$$

$$\iint u^{b-1}\ v^{b'-1}\ (1-u-v)^{c-b-b'-1}\ e^{ux+vy}\ du\, dv,$$

जहां पर $u \geq 0$, $v \geq 0$, $u+v \geq 1$ और b, b' तथा (c–b–b') के वास्तविक भाग शून्य से बड़े होते हैं।

इर्दली (Erdely) तथा फलन Φ_2 के लिए निम्नलिखित एकल परिरेखी समाकल दिया गया है।

$$\Phi_2 (b, b'; c; x, y) = \frac{\Gamma (c)}{2\pi i} \int e^t\ t^{-c} \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{-b} \left(1 - \frac{y}{t}\right)^{-b'} dt$$

जहां समाकल की परिरेखा एक ऐसे पाश से संबंधित है जो $-\infty$ से शुरू होकर $-\infty$ पर ही समाप्त होता है तथा धनात्मक दिशा में समाकल के विलक्षण बिंदुओं 0, x व y की घेराबंदी करता है।

कैम्पे डी फैराइट के फलन

जिस प्रकार व्यापकीकृत एकल पराज्यामितीय फलनों के विस्तार से एपेल के दोहरे पराज्यामितीय फलनों की व्युत्पत्ति की गई है, ठीक उसी प्रकार

दोहरे पराज्यामितीय फलनों में प्राचलों की संख्या बढ़ाकर कैम्पे डी फैराइट ने फलनों का निर्माण किया, जिनका श्रेणी प्रसार निम्नलिखित रूप से लिखा जाता है।

$$F\left[\begin{array}{c|c|c} A & a_1, \ldots\ldots\ldots, a_A & \\ B & b_1, b'_1; \ldots\ldots, b_B, b'_B & x, y \\ C & c_1, \ldots\ldots\ldots, c_C & \\ D & d_1, d'_1, \ldots\ldots, d_D, d'_D & \end{array}\right]$$

$$= \sum \frac{\prod_{j=1}^{A} (a_j, m+n) \prod_{j=1}^{B} (b^1{}_j\, m)(b^1{}_j\, n)\, x^m\, y^n}{\prod_{j=1}^{C} (c_j, m+n) \prod_{j=1}^{D} (d_j, m)\ (d_j, n)\ m!\ n!} \quad \text{....समी. (19)}$$

कैम्पे डी फैराइट फलन के लिए ज्यादा सुसंहत रूप ब्रुकनल एवं चौन्डी द्वारा निम्नलिखित रूप में परिभाषित किया गया है–

$$F\begin{array}{c} A:B \\ \\ C:D \end{array}\left[\begin{array}{ccccc} (a) & : & (b); & (b'); & \\ & & & & x, y \\ (c) & : & (d); & (d'); & \end{array}\right]$$

कैम्पे डी फैराइट फलन के विशिष्ट उदाहरणों के रूप में एपेल फलनों को निम्नवत् लिखा जा सकता है :

$$F^{1,1}_{1,0} = F_1, \qquad F^{1,1}_{0,1} = F_2, \qquad F^{0,2}_{1,0} = F_3$$

$$\text{और } F^{2,0}_{0,1} = F_4$$

कैम्पे डी फैराइट फलन के लिए कई बहुगुण समाकल सूत्र दिए गए हैं, जिनमें से कुछ उदाहरण यहां दिए जा रहे हैं:

$$F\begin{matrix} A,1 \\ \\ A,0\end{matrix}\left[\begin{matrix}(a) : b, & b'; \\ & x, y \\ (c); & ;\end{matrix}\right]$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int ...(A)... \int u_1^{a_1-1}(1-u_1)^{c_1-a_1-1} ... u_A (1-u_A) c_A - u_{A-1}$$

$$.(1-u_1 u_2 .... u_A x)^{-b} \ (1-u_1 \ u_2 .... u_A y)^{-b'} \ du_1 ..... du_A$$

$$F\begin{matrix} 1,B \\ \\ 0,B\end{matrix}\left[\begin{matrix} a : (b); & (b'); \\ & x, y \\ - \ ; (d); & (d');\end{matrix}\right]$$

$$= \frac{\Gamma(d_1) \ \Gamma(d_1') .... \Gamma(d_B) \ \Gamma(d_B')}{\Gamma(b_1) \Gamma(d_1 - b_1) ..... \Gamma(b_B) \ \Gamma(d_B - b_B)}$$

$$. \int ...(2B)... \int \begin{matrix} u_1^{b_1-1} v_1^{b_1'-1} (1-u_1)^{d_1-b_1-1} (1-v_1)^{d_1'-b_1'-1} ..... \\ u_B^{b_B-1} \ v_B^{b_B'-1} \ (1-u_B)^{d_B-b_B-1} (1-v_B)^{d_B'-b_B'-1} \\ (1-u_1 u_2 ... u_B x - v_1 v_2 ... v_B y)^{-a} du_1 dv_1 .. du_B dv_B \end{matrix}$$

इन दोनों समाकलों में सभी चरों का प्रसार बंद अंतराल [0, 1] में सन्निहित है। अब हम एक ऐसे फलन का समाकल सूत्र देंगे जिसके लिए u_1, v_1,.....u_c, v_c और $1-u_1-v_1$,...... व $1-u_c-v_c$ सभी शून्य से बड़े हैं।

$$F\begin{matrix} 0, C+1 \\ \\ C, 0\end{matrix}\left[\begin{matrix} - ; (b); & (b'); \\ & x, y \\ (c); \ - & ;\end{matrix}\right]$$

$$= \frac{\Gamma(c_1) .... \Gamma(c_C)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_1') \ \Gamma(c_1 - b_1 - b_1') .... \Gamma(b_C) \ \Gamma(b_C') \ \Gamma(c_C - b_C - b_C')}$$

$$x \int ...(2C)... \int \begin{matrix} u_1^{b_1-1} \ v_1^{b_1'-1} (1-u_1-v_1)^{c_1-b_1-b_1'-1} ..... \\ u_C{}^{b}C^{-1} \ v^{b'}C^{-1} (1-u_C-v_C)^C C^{-b} C^{-b'} C^{-1} \\ (1-u_1 u_2 ...^u Cx)^{-b} C^{+1} (1-v_1 v_2 ....^v Cy)^{-b'} C^{+1} \\ du_1 \ dv_1 ...... du_C \ dv_C \end{matrix}$$

समी. (19) द्वारा दिए गए कैम्पे डी फैराइट फलन के लिए बार्ने की तरह का एक दोहरा समाकल निम्नलिखित रूप से परिभाषित किया जा सकता है :

$$KF\begin{matrix} A, B \\ \\ C, D\end{matrix}(x,y) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint \phi(s,t) \ \Gamma(-s) \ \Gamma(-t) (-x)^s (-y)^t \ ds \ dt$$

जहां पर $K = \dfrac{\prod_{j=1}^{A} (a_j) \prod_{j=1}^{B} [(b_j) \ (b_j')]}{\prod_{j=1}^{C} (c_j) \prod_{j=1}^{D} [(d_j) \ (d_j')]}$

और $\phi(s,t) = \dfrac{\prod_{j=1}^{A} (a_j + s + t) \prod_{j=1}^{B} [(b_j + s) \ (b_j' + t)]}{\prod_{j=1}^{C} (c_j + s + t) \prod_{j=1}^{D} [(d_j + s) \ (d_j' + t)]}$

हॉर्न के फलन

द्विघातीय पराज्यामितीय आंशिक अवकल समीकरणों के हलों के रूप में हॉर्न के फलन प्राप्त होते हैं, जिनमें से प्रमुख फलन निम्नवत् हैं :

$$G_1(a,b,b';x,y) = \Sigma \frac{(a, m+n)(b, n-m)(b', m-n) x^m y^n}{m! \ n!}$$

$$G_2(a, a', b, b'; x, y) = \Sigma \frac{(a,m) \ (a', n) \ (b, n-m)(b', m-n) x^m}{m! \ n!}$$

$$G_3(a, a'; x, y) = \Sigma \frac{(a, 2n-m)(a', 2m-n)\, x^m y^n}{m!\; n!}$$

$$H_1(a, b, c; d; x, y) = \Sigma \frac{(a, m-n)(b, m+n)(c, n)\, x^m y^n}{(d, m)\; m!\; n!}$$

$$H_2(a, b, c; d; e; x, y) = \Sigma \frac{(a, m-n)(b, m+n)(c, n)(d, n)\, x^m y^n}{(e, m)\; m!\; n!}$$

$$H_3(a, b; c; x, y) = \Sigma \frac{(a, 2m+n)(b, n)\, x^m y^n}{(c, m+n)\; m!\; n!}$$

$$H_4(a, b; c, d\; x, y) = \Sigma \frac{(a, 2m+n)(b, n)\, x^m y^n}{(c, m)(d, n)\; m!\; n!}$$

$$H_5(a, b; c, x, y) = \Sigma \frac{(a, 2m+n)(b, n-m)\, x^m y^n}{(c, n)\; m!\; n!}$$

$$H_6(a, b, c; x, y) = \Sigma \frac{(a, 2m-n)(b, n-m)(c, n)\, x^m y^n}{m!\; n!}$$

तथा

$$H_7(a, b, c; d; x, y) = \Sigma \frac{(a, 2m-n)(b, n)(c, n)\, x^m y^n}{(d, m)\; m!\; n!}$$

हॉर्न एवं ऐपेल फलनों के रूपांतरण

हॉर्न एवं एपेल फलनों की आवेष्टित करते हुए निम्नलिखित रूपांतरण प्राप्त किए गए हैं जो मूल श्रेणी के परिचालन से प्राप्त होते हैं।

$$F_1(a, b, b'; c; x, y) = \left(1 - \frac{y}{x}\right)^{-b} H_2\left(b, a, b, 1-b; c; x, \frac{y}{x-y}\right)$$

$$F_1(a, b, b'; c; x, y) = (1-y)^{-b'} F_3\left(a, c-a, b, b'; c, b+b'; x, \frac{y}{y-1}\right)$$

$$F_1(a, b, b'; c; x, y) = \left(\frac{x}{y}\right)^{b'} F_2\left(b+b'\; a, b',\; c; b+b'; x, 1-\frac{x}{y}\right)$$

इसके अतिरिक्त पोकेमर के दोहरे पाश समाकल का फलन G_2 के लिए अनुप्रयोग करते हुए निम्नलिखित दो परिणाम प्राप्त किए गए हैं:

$G_2(a, a', b, b'; x, y) =$

$$(1+x)^{-a}(1+y)^{-a'} F_2\left(1-b-b', a, a'; 1-b, 1-b'; \frac{x}{x+1}; \frac{y}{y(y+1)}\right)$$

तथा

$G_2(a, a', b, b'; x, y) =$

$$(1+y)^{-a'} H_2\left(b', a, a'; 1-b-b'; 1-b; -x; -\frac{y}{y+1}\right)$$

लौरेसिला फलन

ऐपेल फलनों से शुरुआत कर सर्वप्रथम बहुगुण पराज्यामितीय फलनों को सुव्यवस्थित रूप से परिभाषित करने का श्रेय लौरिसेला को जाता है, जिन्हें इनके नाम पर लौरिसेला फलन कहा जाता है। इन फलनों के लिए बहुगुण श्रेणी निरुपण निम्नवत् किया जाता है:

$F_A^{(n)}(a, b_1, \ldots, b_n; c_1, \ldots\ldots c_n;\; x_1, \ldots\ldots x_n)$

$$= \Sigma \frac{(a, m_1 + \ldots\ldots m_n)(b_1, m_1)\ldots\ldots(b_n, m_n)\, x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}}{(c_1, m_1)\ldots\ldots(c_n, m_n)\quad m_1! \ldots\ldots m_n!},$$

$F_B^{(n)}(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots\ldots b_n;\; c; x_1, \ldots\ldots x_n)$

$$= \Sigma \frac{(a_1, m_1)\ldots\ldots(a_n, m_n)(b_1, m_1)\ldots\ldots(b_n, m_n)\, x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}}{(c, m_1 + \ldots\ldots + m_n)\quad m_1! \ldots\ldots m_n!},$$

$F_C^{(n)}(a, b; c_1 \ldots, c_n; x_1, \ldots\ldots\ldots, x_n)$

$$= \Sigma \frac{(a, m_1 + \ldots\ldots + m_n)(b, m_1 + \ldots\ldots + m_n)\, x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}}{(c_1, m_1)\ldots\ldots(c_n, m_n)\quad m_1! \ldots\ldots m_n!}$$

और $F_D^{(n)}(a, b_1; \ldots, b_n; c; x_1, \ldots\ldots\ldots, x_n)$

$$= \Sigma \frac{(a, m_1 + \ldots\ldots + m_n)(b_1\, m_1)\ldots\ldots(b_n, m_n)\, x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}}{(c_1, m_1)\ldots\ldots(c_n, m_n)\quad m_1! \ldots\ldots m_n!}$$

यदि n जो चरों की संख्या को व्यक्त करता है, को दो के बराबर कर दिया जाए तो ये चारों फलन क्रमशः F_2, F_3, F_4 व F_1 (जो एपेल फलन हैं) में बदल जाते हैं। यदि n = 1 रख दिया जाए तो ये चारों फलन गाउस पराज्यामितीय फलन ${}_2F_1$ में बदल जाएंगे।

लौरेसिला फलनों की संगामी प्रकार

एपेल फलनों से सीमांतता की स्थिति में हम्बर्ट फलनों की व्युत्पत्ति के बारे में हम पहले वर्णन कर चुके हैं। इसी प्रकार लौरिसेला फलनों से सीमांतता स्थिति में लौरिसेला फलनों के संगामी प्रकार परिभाषित किए जाते हैं, जो निम्नवत् हैं :

$$\lim_{\epsilon\to 0} F_A^{(n)}\left(a, \frac{1}{\epsilon},\ldots,\frac{1}{\epsilon}; c_1\ldots\ldots c_n; \epsilon x_1,\ldots\ldots \epsilon x_n\right)$$

$$= \Sigma\frac{(a, m_1+\ldots+m_n)\; x_1^{m_1}\ldots\ldots x_n^{m_n}}{(c_1, m_1)\ldots\ldots(c_n, m_n)\; m_1!\ldots\ldots m_n!}$$

$$= \psi_2^{(n)}(a; c_1,\ldots, c_n; x_1,\ldots\ldots,x_n)$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} F_D^{(n)}\left(\frac{1}{\epsilon}, b_1,\ldots\ldots,b_n; c; \epsilon x_1,\ldots\ldots,\epsilon x_n\right)$$

$$= \Sigma\frac{(b_1,m_1)\ldots\ldots(b_n, m_n)\; x_1^{m_1}\ldots\ldots x_n^{m_n}}{(c, m_1+\ldots\ldots+m_n)\quad m_1!\ldots\ldots m_n!}$$

$$= \Phi_2^{(n)}(b_1,\ldots\ldots, b_n; c; x_1,\ldots\ldots,x_n),$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} F_B^{(n)}\left(a_1,\ldots, a_n, b_1,\ldots\ldots, b_{n-1},\frac{1}{\epsilon}; c; x_1;\ldots\ldots x_{n-1}, \epsilon x_n\right)$$

$$= \Sigma\frac{(a_1,m_1)\ldots\ldots(a_n, m_n)\,(b_1.m_1)\ldots\ldots(b_{n-1},m_{n-1})\; x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}}{(c, m_1+\ldots\ldots+m_n)\qquad m_1!\ldots\ldots m_n!}$$

$$= E_1^{(n)}(a_1,\ldots\ldots, a_n, b_1,\ldots\ldots,b_{n-1};\; c; x_1,\ldots\ldots x_n)$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} F_D^{(n)}\left(a, b_1,\ldots, b_{n-1},\frac{1}{\epsilon}; c; x_1,\ldots x_{n-1}; \epsilon x_n\right)$$

$$= \Sigma\frac{(a,m_1,+\ldots\ldots+m_n)\,(b_1, m_1)\ldots\ldots(b_{n-1}, m_{n-1})\; x_1^{m_1}\ldots\ldots x_n^{m_n}}{(c, m_1+\ldots\ldots+m_n)\qquad m_1!\ldots\ldots m_n!}$$

$$= \Phi_D^{(n)}(a, b_1,\ldots\ldots, b_{n-1},; c; x_1;\ldots\ldots, x_n)$$

और

$$\lim_{\epsilon\to 0} F_D^{(n)}\left(\frac{1}{\epsilon}, b_1,\ldots\ldots b_{n-1},\frac{1}{\epsilon}; c; \epsilon x_1,\ldots\ldots,\epsilon x_{n-1}, \epsilon^2 x_n\right)$$

$$= \Sigma\frac{(b_1, m_1)\ldots\ldots(b_{n-1}, m_{n-1})\; x_1^{m_1}\ldots\ldots x_n^{m_n}}{(c, m_1+\ldots\ldots+m_n)\qquad m_1!\ldots\ldots m_n!}$$

$$= \Phi_3^{(n)}(b_1,\ldots\ldots, b_{n-1}; c; x_1,\ldots\ldots,x_n)$$

फलन E_3 व Φ_3 बहुगुण पराज्यामितीय फलनों में सबसे महत्वपूर्ण माने गए हैं क्योंकि ज्ञान–विज्ञान के अन्य क्षेत्रों में इनका अनुप्रयोग सबसे अधिक होता है।

अवकल गुणधर्म-संकलन एवं गुणन प्रमेय

हम मानते हैं कि फलन $F_A^{(n)}$ को गाउस फलन के बहुगुण श्रेणी प्रसार के रूप में निम्नलिखित तौर पर लिखा जा सकता है :

$$F_A^{(n)}(a, b_1,\ldots\ldots,b_n; c_1,\ldots\ldots, c_n; x_1, x_2,\ldots x_n)$$

$$= \left[\Sigma\frac{(a), m_1+\ldots\ldots+m_{n-1})\;(b_1, m_1)\ldots\ldots(b_{n-1}, m_{n-1})\; x_1^{m_1}\ldots\ldots x_n^{m_n}}{(c_1, m_1)\ldots\ldots(c_n, m_n)\qquad (m_1!\ldots\ldots m_n!}\right.$$

$$\left.\cdot{}_2F_1(a+m_1+\ldots\ldots+m_{n-1}, b_n; c_n; x_n)\right]\ldots\ldots \text{समी. } (20)$$

अब यदि भीतरी गाउस फलन को पृष्ठ 22-25 पर दी गई विधि से पद के बाद पद अवकलित किया जाए तो

$$\frac{d^k}{dx_n^{kn}}\;{}_2F_1(a+m_1+\ldots\ldots+m_{n-1}, b_n; c_n; x_n)$$

$$= \left[(a + m_1 + \ldots + m_n, kn) (b_n, kn) \big/ (c_n, k_n) \right.$$

$$\left. \cdot {}_2F_1 (a + k_n + m_1 + \ldots + m_{n-1}, b_n + k_n; c_n + k_n; x_n) \right] \ldots \text{समी. } (21)$$

प्राप्त होता है, जिससे लौरिसेला फलन $F_A^{(n)}$ के लिए एक अवकल संबंध की प्राप्ति होती है, जो निम्नवत् है :

$$\frac{(c_n, k_n)}{(a, k_n)(b_n, k_n)} \frac{\partial^{k_n}}{\partial x_n^{k_n}} F_A^{(n)}(a, b_1, \ldots, b_n; c_1, \ldots, c_n; x_1, \ldots, x_n)$$

$$= F_A^{(n)}(a + k_n, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n + k_n; c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n + k_n; c_1, \ldots x_n)$$

$$\frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} F_A^{(n)}(a, b_1, \ldots, b_n; c_1, \ldots, c_n; x_1, \ldots, x_n)$$

$$= \left[\frac{(a, k_1 + \ldots + k_n)(b_1, k_1) \ldots (b_n, k_n)}{(c_1, k_1) \ldots (c_n, k_n)} \right.$$

$$\left. F_A^{(n)}(a + k_1 + \ldots + k_n, b_1 + k_1, \ldots, b_n + k_n; c_1 + k_1, \ldots, c_n + k_n; x_1, \ldots, x_n) \right]$$

इसी प्रकार के अन्य परिणाम नीचे दिए जा रहे हैं।

$$\frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} F_B^{(n)}(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n; c; x_1, \ldots x_n)$$

$$= \left[\frac{(a_1, k_1) \ldots (a_n, k_n)(b_1, k_1) \ldots (b_n, k_n)}{(c, k_1 + \ldots + k_n)} \right.$$

$$\left. F_B^{(n)}(a_1 + k_1, \ldots, a_n + k_n, b_1 + k_1, \ldots, b_n + k_n; c + k_1 + \ldots k_n; x_1 \ldots x_n) \right]$$

$$\frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} F_C^{(n)}(a, b; c_1, \ldots, c_n; x_1, \ldots, x_n)$$

$$= \left[\frac{(a, k_1 + \ldots + k_n)(b, k_1 + \ldots + k_n)}{(c_1, k_1) \ldots (c_n, k_n)} \right.$$

$$\left. F_C^{(n)}(a + k_1 + \ldots + k_n, b + k_1 + \ldots + k_n; c_1 + k_1, \ldots, c_n + k_n; x_1, \ldots x_n) \right]$$

तथा

$$\frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} F_D^{(n)}(a, b_1, \ldots, \ldots, b_n; c; x_1, \ldots, x_n)$$

$$= \left[\frac{(a, k_1 + \ldots + k_n)(b_1, k_1) \ldots (b_n, k_n)}{(c, k_1, \ldots, k_n)} \right.$$

$$\left. F_D^{(n)}(a + k_1 + \ldots + k_n, b_1 + k_1, \ldots, b_n + k_n; c + k_1 + \ldots + k_n; x_1, \ldots, x_n) \right]$$

अब संकलन एवं गुणन प्रमेयों का मान निकालने के लिए टेलर के प्रमेय का अनुप्रयोग क्रमशः निम्नलिखित दो रूपों से किया जाएगा :

$$\left[f(x + y) = \Sigma f^{(p)}(x) \frac{y^p}{p!} \right] \ldots \text{समी. } (22)$$

$$\text{और } \left[f(xy) = \Sigma (y - 1)^p \, x^p \, f^{(p)} \frac{(x)}{(p)!} \right] \ldots \text{समी. } (23)$$

जहां $|y| < \delta$, δ वैश्लेषिक फलन $f(x)$ के लिए अभिबिंदुगता की त्रिज्या है तथा p का संकलन शून्य से लेकर अनंत तक है।

समी. (22) का अनुप्रयोग फलन ${}_2F_1$ के लिए दिए गए समी. (21) पर करने पर

$${}_2F_1(a, b; c; x + y) = \Sigma \frac{(a, p)(b, p) y^p}{(c, p) \; p!} \; {}_2F_1(a + p, b + p; c + p; x)$$

और इस परिणाम को समी. (20) में प्रयुक्त करने पर

$$F_A^{(n)}(a, b_1, \ldots, b_n; c_1, \ldots, c_n; x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + y_n)$$

$$\Sigma \frac{(a, p_n)(b, p_n)}{(c_n, p_n) \, p_n!} y_n^{p_n} F_A^{(n)} \{(a + p_n, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n + p_n;$$

$$c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n + p_n; x_1 \ldots, x_{n-1}, x_n + y)\}$$

इस प्रक्रिया को n बार करते रहने पर हमें निम्नलिखित संकलन प्रमेय प्राप्त होता है।

$$F_A^{(n)}\ (a, b_1, \ldots, b_n; c_1, \ldots, c_n; x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

$$= \Big\{ \Sigma \frac{(a, p_1 + \ldots + p_n)\ (b_1, p_1) \ldots (b_n, p_n)}{(c_1, p_1) \ldots (c_n, p_n)\ p_1! \ldots p_n!}\ y_1^{p_1} \ldots y_n^{p_n}$$

$$F_A^{(n)} (a + p_1 + \ldots + p_n,\ b_1 + p_1, \ldots, b_n + p_n;\ c_1 + p_1, \ldots, c_n + p_n;\ x_1, \ldots x_n) \Big\}$$

इसी प्रकार के अन्य संकलन प्रमेय निम्नलिखित रूपों में लिखे जा सकते हैं :

$$F_B^{(n)}\ (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n; c; x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

$$= \Big\{ \Sigma \frac{(a_1, p_1) \ldots (a_n, p_n)\ (b_1 p_1) \ldots (b_n, p_n)}{(c, p_1 + \ldots + p_n)\ p_1! \ldots p_n!}\ y_1^{p_1} \ldots y_n^{p_n}$$

$$F_B^{(n)}\ (a_1 + p_1, \ldots, a_n + p_n, b_1 + p_1, \ldots, b_n + p_n; c + p_1 + p_n; x_1, \ldots x_n) \Big\}$$

जहां पर n-तह का संकलन $p_1, \ldots p_n$ के लिए शून्य से अनंत तक किया गया है।

इसी प्रकार

$$FC^{(n)}\ (a, b; c_1, \ldots, c_n; x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

$$= \Big\{ \Sigma \frac{(a, p_1 + \ldots + p_n)\ (b, p_1 + \ldots + p_n)}{(c_1, p_1) \ldots (c_n, p_n)\ p_1!\, p_n!}\ y_1^{p_1} \ldots y_n^{p_n}$$

$$FC^{(n)}\ (a + p_1 + \ldots + p_n, b_1 + p_1, \ldots, b_n + p_n; c + p_1 + \ldots p_n; x_1, \ldots x_n) \}$$

और

$$FD^{(n)}\ (a_1, b_1, \ldots, b_n;\ c;\ x_1 + y_1, \ldots x_n + y_n)$$

$$= \Big\{ \frac{(a, p_1 + \ldots + p_n)\ (b_1, p_1), \ldots (b_n, p_n)}{(c, p_1 + \ldots + p_n)\ p_1! \ldots p_n!}\ y_1^{p_1} \ldots y_n^{p_n}$$

$$.FD^{(n)}\ (a + p_1 + \ldots + p_n,\ b_1 + p_1 \ldots, b_n + p_n;\ c + p_1 + \ldots + p_n;\ x_1, \ldots x_n) \Big\}$$

समी. (23) का अनुप्रयोग करने पर लैरिसेला फलनों $F_A^{(n)}$, $F_B^{(n)}$, $F_C^{(n)}$ तथा $F_D^{(n)}$ के लिए गुणन प्रमेयों की प्राप्ति निम्नलिखित रूपों में की जा सकती है :

$$F_A^{(n)}\ (a, b_1, \ldots, b_n; c_1, \ldots, c_n; x_1 y_1, \ldots, x_n\ y_n)$$

$$= \Big\{ \Sigma \frac{(a, p_1 + \ldots + p_n)\ (b_1, p_1) \ldots (b_n, p_n)}{(c_1, p_1) \ldots (c_n, p_n)\ p_1! \ldots p_n!}\ x_1^{p_1} (y_1 - 1)^{p_1} \ldots x_n^{p_n} (y_n - 1)^{p}$$

$$F_A^{(n)}\ (a + p_1 + \ldots + p_n, b_1 + p_1, \ldots, b_n + p_n; c_1 + p_1, \ldots, c_n + p_n; x_1, \ldots x_n) \Big\}$$

$$F_B^{(n)}\ (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n; c; x_1 y_1, \ldots, x_n\ y_n)$$

$$= \Big\{ \Sigma \frac{(a_1, p_1) \ldots (a_n, p_n)\ (b_1, p_1) \ldots (b_n, p_n)}{(c, p_1 + \ldots + p_n)\, p_1! \ldots p_n!}\ x_1^{p_1} (y_1 - 1)^{p_1} \ldots x_n^{p_n} (y_n - 1)^{p_n}$$

$$F_B^{(n)}\ (a_1 + p_1, \ldots, a_n + p_n, b_1 + p_1, \ldots, b_n + p_n; c + p_1 + \ldots + p_n; x_1, \ldots, x_n) \Big\}$$

$$F_C^{(n)}\ (a, b; c_1, \ldots, c_n; x_1 y_1, \ldots, x_n y_n)$$

$$= \Big\{ \Sigma \frac{(a, p_1 + \ldots + p_1)(b, p_1 + \ldots + p_n)}{(c_1, p_1) \ldots (c_n, p_n)\, p_1! \ldots p_n!}\ x_1^{p_1} (y_1 - 1)^{p_1} \ldots x_n^{p_n} (y_n - 1)^{p_n}$$

$$F_C^{(n)}\ (a + p_1 + \ldots + p_n,\ b_n, b + p_1 + \ldots + p_n; c_1 + p_1, \ldots, c_n + p_n; x_1, \ldots, x_n) \Big\}$$

और

$$F_D^{(n)}\ (a, b_1, \ldots, b_n; c; x_1 y_1, \ldots, x_n\ y_n)$$

$$= \Big\{ \Sigma \frac{(a, p_1 + \ldots + p_n)(b_1, p_1) \ldots (b_n, p_n)}{(c, p_1 + \ldots + p_n)\ p_1! \ldots p_n!}\ x_1^{p_1} (y_1 - 1)^{p_1} \ldots x_n^{p_n} (y_n - 1)^{p_n}$$

$$F_D^{(n)}\ (a + p_1 + \ldots + p_n, b_1 + p_1, \ldots, b_n + p_n; c + p_1 + \ldots + p_n; x_1, \ldots, x_n) \Big\}$$

लौरेसिला एवं सरन के तिहरे पराज्यामितीय फलन

लौरिसेला ने अपने शोध के दौरान इस बात का अनुमान कर लिया था कि तीन चरों वाले चौदह पराज्यामितीय फलन परिभाषित किए जा सकते हैं जिनमें F_A^3, F_B^3, F_C^3, व F_D^3 सम्मिलित हैं (इनका वर्णन यहां पर नहीं किया

जाएगा।) सरन पहले गणितज्ञ थे जिन्होंने न केवल इस श्रेणी के बाकी दस फलनों की खोजी की, अपितु इनका परिष्कृत संकेतन भी किया। ये फलन जिन्हें अब लौरिसेला सरन फलन कहते हैं, नीचे दिए जा रहे हैं। हर फलन के आगे लौरिसेला द्वारा दिया गया पुराना संकेत भी दिया जा रहा है।

F_4 $\quad F_E(a_1, a_1, a_1, b_1, b_2, b_2; c_1, c_2, c_3; x, y, z)$

$$= \Sigma \frac{(a_1, m+n+p)\,(b_1, m)\,(b_1, n+p)\, x^m y^n z^p}{(c_1, m)\,(c_2, n)\,(c_3, p)\quad m!\, n!\, p!},$$

F_{14} $\quad F_F(a_1, a_1, a_1, b_1, b_2, b_1; c_1, c_2, c_2; x, y, z)$

$$= \Sigma \frac{(a_1, m+n+p)\,(b_1, m+p)\,(b_2, n)\, x^m y^n z^p}{(c_1, m)\,(c_2, n+p)\quad m!\, n!\, p!},$$

F_8 $\quad F_G(a_1, a_1, a_1, b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_2; x, y, z)$

$$= \Sigma \frac{(a_1, m+n+p)\,(b_1, m)\,(b_2, n)\,(b_3, p)\, x^m y^n z^p}{(c_1, m)\,(c_2, n+p)\quad m!\, n!\, p!},$$

F_3 $\quad F_K(a_1, a_2, a_2, b_1, b_2, b_1; c_1, c_2, c_3; x, y, z)$

$$= \Sigma \frac{(a_1, m)\,(a_2, n+p)\,(b_1, m+p)\,(b_2, n)\, x^m y^n z^p}{(c_1, m)\,(c_2, n)\,(c_3, p)\quad m!\, n!\, p!},$$

F_{11} $\quad F_M(a_1, a_2, a_1, b_1, b_2, b_1; c_1, c_2, c_2; x, y, z)$

$$= \Sigma \frac{(a_1, m)\,(a_2, n+p)\,(b_1, m+p)\,(b_2, n)\, x^m y^n z^p}{(c_1, m)\,(c_2, n+p)\quad m!\, n!\, p!},$$

F_6 $\quad F_N(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_1; c_1, c_2, c_2; x, y, z)$

$$= \Sigma \frac{(a_1, m)\,(a_2, n+p)\,(b_1, m+p)\,(b_2, n)\, x^m y^n z^p}{(c_1, m)\,(c_2, n+p)\quad m!\, n!\, p!},$$

F_{12} $\quad F_P(a_1, a_2, a_1, b_1, b_1, b_2; c_1, c_2, c_2; x, y, z)$

$$= \Sigma \frac{(a_1, m+p)\,(a_2, n)\,(b_1, m+n)\,(b_2, p)\, x^m y^n z^p}{(c_1, m)\,(c_2, n+p)\quad m!\, n!\, p!},$$

F_{10} $\quad F_R(a_1, a_2, a_1, b_1, b_2, b_1; c_1, c_2, c_2; x, y, z)$

$$= \Sigma \frac{(a_1, m+p)\,(a_2, n)\,(b_1, m+p)\,(b_2, n)\, x^m y^n z^p}{(c_1, m)\,(c_2, n+p)\quad m!\, n!\, p!},$$

3123HRD/2000—7

F_7 $\quad F_S(a_1, a_2, a_2, b_1, b_2, b_3; c_1, c_1, c_1; x, y, z)$

$$= \Sigma \frac{(a_1, m)\,(a_2, n+p)\,(b_1, m)\,(b_2, n)\,(b_3, p)\, x^m y^n z^p}{(c_1, m+n+p)\quad m!\, n!\, p!}$$

और

F_{13} $\quad F_T(a_1, a_2, a_2, b_1, b_2, b_1; c_1, c_1, c_1; x, y, z)$

$$= \Sigma \frac{(a_1, m)\,(a_2, n+p)\,(b_1, m+p)\,(b_2, n)\, x^m y^n z^p}{(c_1, m+n+p)\quad m!\, n!\, p!}$$

लौरेसिला–सरन फलनों का समाकल निरूपण

एपेल फलनों के लिए ऑयलर समाकलों के निरुपण की शुरुआत कर सरन ने $F_G, F_K, F_M, F_N, F_P, F_S$ और F_T फलनों का समाकल निरूपण किया है। हम यहां पर उदाहरण के तौर पर F_K व F_T फलनों के परिणाम उद्धृत कर रहे हैं।

$$\Gamma \begin{bmatrix} a_1, b_1, b_2, c_1 - a_1, c_1 - b_2, c_3 - b_1 \\ c_1, \quad c_2, \quad c_3 \end{bmatrix}$$

$F_K(a_1, a_2, a_2, b_1, b_2, b_1; c_1, c_2, c_3; x, y, z)$

$$\int_0^1\!\!\int_0^1\!\!\int_0^1 u^{a_1-1} v^{b_2-1} w^{b_1-1} (1-u)^{c_1-a_1-1} (1-v)^{c_2-b_2-1} (1-w)^{c_3-b_1-1} (1-ux)^{a_2-b_1} (1-ux-vy-wz+uvxy)^{-a_2}\, du\, dv\, dw$$

वशर्ते कि c_1 (वास्तविक) $> a_1$ (वास्तविक) > 0, c_3 (वास्तविक) $> b_1$ (वास्तविक) > 0 तथा c_2 (वास्तविक) $> b_2$ (वास्तविक) > 0.

और

$$\Gamma \begin{bmatrix} b_1, b_2, c_1 - b_1 - b_2 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

$F_T(a_1, a_2, a_2, b_1, b_2, b_1; c_1, c_1, c_1; x, y, z)$

$$= \iint u^{b_2-1} v^{b_1-1} (1-u-v)^{c_1-b_1-b_2-1} (1-vx)^{-a_1} (1-uy-vz)^{-a} 2du\, dv$$

जबकि c_1 (वास्तविक) > (b_1+b_2) (वास्तविक) > 0,

b_1 (वास्तविक) > 0, b_2 (वास्तविक) > 0

और $u \geqq 0,\ v \geqq 0,\ u+v \leqq 1$

चतुर्गुण पराज्यामितीय फलन

हैराल्ड एक्सटन ने सर्वप्रथम लौरिसेला के चार फलनों $F_A^{(4)}$, $F_B^{(4)}$, $F_C^{(4)}$ तथा $F_D^{(4)}$ के अतिरिक्त चतुर्गुण पराज्यामितीय फलनों की परिभाषा दी। इनमें से कुछ महत्वपूर्ण फलनों को निम्नलिखित प्रकार से श्रेणी प्रसार द्वारा वर्णित किया जा सकता है।

$K_1\,(a, a, a, a; b, b, b, c; d, e_1, e_2, d; x, y, z, t)$

$$= \Sigma \frac{(a, k+m+n+p)\,(b, k+m+n)\,(c, p)\,x^k\,y^m\,z^n\,t^p}{(d, p)\,(e_1, m)\,(e_2, n)\quad k!\,m!\,n!\,p!}$$

$K_2\,(a, a, a, a; b, b, b, c; d_1, d_2, d_3, d_4; x, y, z, t)$

$$= \Sigma \frac{(a, k+m+n+p)\,(b, k+m+n)\,(c, p)\,x^k\,y^m\,z^n\,t^p}{(d_1, k)\,(d_2, m)\,(d_3, n)\,(d_4, p)\quad k!\,m!\,n!\,p!}$$

$K_{16}\,(a_1, a_2, a_3, a_4; b;\ x, y, z, t)$

$$= \Sigma \frac{(a_1, k+m)\,(a_2, k+n)\,(a_3, m+p)\,(a_4, n+p)\,x^k\,y^m\,z^n\,t^p}{(c, k+m+n+p)\quad k!\,m!\,n!\,p!}$$

$K_{17}\,(a_1, a_2, a_3,\ b_1, b_2; c;\ x, y, z, t)$

$$= \Sigma \frac{(a_1, k+m)\,(a_2, k+n)\,(a_3, m+n)\,(b_1, p)\,(b_2, p)\ x^k\,y^m\,z^n\,t^p}{(c, k+m+n+p)\quad k!\,m!\,n!\,p!}$$

$K_{19}\,(a_1, a_2,\ b_1, b_2, b_3, b_4; c;\ x, y, z, t)$

$$\left[\Sigma \frac{(a_1, k+m)\,(a_2, k+n)\,b_1, m)\,(b_2, n)\,(b_3, p)\,(b_4, p)}{(c, k+m+n+p)} \cdot \frac{x^k\,y^m\,z^n\,t^p}{k!\,m!\,n!\,p!}\right]$$

3123HRD/2000-8

चतुर्गुण पराज्यामितीय फलनों के व्यापकीकरण के द्वारा हैराल्ड एक्सटन ने बहुगुण पराज्यामितीय फलनों की रूपरेखा तैयार की और इन्हें निम्नवत् परिभाषित किया :

$$\underset{(1)\ (D)}{\overset{(k)\ (n)}{E}}\ (a, b_1, \ldots\ldots, b_n; c, c'; x_1, \ldots., x_n)$$

$$= \Sigma\ \frac{(a, m_1+\ldots.+m_n)\,(b_1, m_1)\ldots.(b_n, m_n)\ x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}}{(c, m_1+\ldots..+m_k)\,(c', m_{k+1}+\ldots..+m_n)\ m_1!\ldots.m_n!}$$

और

$$\underset{(2)\ (D)}{\overset{(k)\ (n)}{E}}\ (a, a', b_1, \ldots\ldots, b_n; c; x_1, \ldots., x_n)$$

$$= \left\{\Sigma \frac{(a, m_1+\ldots+m_k)\,(a', m_{k+1}+\ldots..+m_n)\,(b_1, m_1)\ldots(b_n, m_n)}{(c, m_1+\ldots+m_n)} \cdot \frac{x_1^{m_1}\ldots..x_n^{m_n}}{m_1!\ldots\ldots.m_n!}\right\}$$

ये फलन लौरिसेला के फलन $F_D^{(n)}$ से काफी नजदीकी रूप से संबंधित हैं। इस कार्य से प्रेरणा पाकर चंदेल ने निम्नलिखित फलन को परिभाषित किया।

$$\underset{(1)\ (C)}{\overset{(1)\ (n)}{K}}\ (a, a', b; c_1, \ldots\ldots, c_n; x_1, \ldots\ldots, x_n)$$

$$= \left\{\Sigma \frac{(a, m_1+\ldots+m_k)\,(a', m_{k+1}+\ldots..+m_n)\,(b_1, m_1+\ldots..m_n)}{(c_1, m_1)\ldots\ldots..(c_n, m_n)} \cdot \frac{x_1^{m_1}\ldots..x_n^{m_n}}{m_1!\ldots\ldots.m_n!}\right\}$$

जो फलन $FC^{(n)}$ से संबंधित है।

अब हम बहुगुण पराज्यामितीय फलनों को ऑयलर प्रकार के समाकलों द्वारा परिभाषित करेंगे।

यदि फलन ${}^{(k)}_{(1)}E^{(n)}_D$ के लिए श्रेणी निरूपण अभिबिंदुग हो तो हम लिख सकते हैं कि

$$ {}^{(k)}_{(1)}E^{(n)}_D (a, b_1,\ldots,b_n; c, c'; x_1,\ldots,x_n) $$

$$ = \left\{ \Gamma\begin{bmatrix} b_1,\ldots,b_n \\ c, \; c' \end{bmatrix} \Sigma \frac{(a, m_1+\ldots+m_n)\; x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}}{m_1!\ldots m_n!} \right. $$

$$ \left. \Gamma\begin{bmatrix} b_1+m_1,\ldots, b_n+m_n \\ c+m_1+\ldots+m_k,\; c'+m_{k+1}+\ldots+m_n \end{bmatrix} \right\} \text{....समी. (24)} $$

अब गामा गुणनफल

$$ G = \Gamma\begin{bmatrix} b_1+m_1,\ldots, b_n+m_n,\; c-b_1\ldots b_k,\; c'-b_{k+1}\ldots-b_n \\ c+m_1+\ldots+m_k,\; c'+m_{k+1}+\ldots+m_n \end{bmatrix} $$

को दो बहुगुण ऑयलर समाकलों के गुणनफल के रूप में निम्न प्रकार से प्रदर्शित किया जा सकता है :

$$ G = \int\ldots(k)\ldots\int u_1^{b_1-1+m_1}\ldots u_k^{b_k-1+m_k}(1-u_1\ldots u_k)^{c-b_1\ldots b_k-1} \; du_1\ldots du_k $$

$$ \int\ldots(k)\ldots\int u_{k+1}^{b_{k+1}-1+m_{k+1}}\ldots u_n^{b_n-1+m_n}(1-u_{k+1}\ldots u_n)^{c-b_{k+1}\ldots b_n-1} \; du_{k+1}\ldots du_n $$

जहां पर समाकलों को क्रमशः नीचे लिखे क्षेत्रों में लिया गया है

$0 \leqq u_1, \ldots 0 \leqq u_n, u_1+\ldots+u_k \leqq 1$

तथा $u_{k+1}+\ldots+u_n \leqq 1$

चूंकि समी. (24) के दाएं पक्ष में दी गई बहुगुण श्रेणी समाकल के परास में अप्रतिबंधित रूप से अभिबिंदुग है, अतः हम समाकल की संक्रिया को पद के बाद पद नियम से संचालित करवा सकते हैं, ताकि

$$ {}^{(k)}_{(1)}E^{(n)}_D (a, b_1,\ldots,b_n; c, c'; x_1,\ldots,x_n) $$

$$ = \Gamma\begin{bmatrix} b_1,\ldots, b_n \\ c, c', c-b_1-\ldots b_k, c'-b_{k+1}\ldots b_n \end{bmatrix} $$

$$ \int\ldots(n)\ldots\int u_1^{b_1-1}\ldots u_n^{b_n-1}(1-u_1\ldots u_k)^{c-b_1\ldots b_k-1} $$

$$ (1-u_{k+1}\ldots u_n)^{c'-b_{k+1}\ldots b_n-1} $$

$$ \Sigma \frac{(a, m_1+\ldots+m_n)\; (u_1 x_1)^{m_1}\ldots(u_n x_n)^{m_n}}{m_1!\ldots m_n!} \; du_1\ldots du_n $$

यदि $|u_1 x_1+\ldots+u_n x_n| < 1$ तो दाएं पक्ष की भीतरी श्रेणी को $(1-u_1x_1\ldots u_n x_n)^{-a}$ लिख सकते हैं, ताकि

$$ {}^{(k)}_{(1)}E^{(n)}_D (a, b_1,\ldots,b_n; c, c'; x_1,\ldots,x_n) $$

$$ = \Gamma\begin{bmatrix} b_1,\ldots, b_n \\ c, c', c-b_1-\ldots b_k, c'-b_{k+1}\ldots b_n \end{bmatrix} $$

$$ \int\ldots(n)\ldots\int u_1^{b_1-1}\ldots u_n^{b_n-1}(1-u_1\ldots u_k)^{c-b_1\ldots-b_k-1} $$

$$ (1-u_{k+1}\ldots u_n)^{c'-b_{k+1}\ldots b_n-1} $$

$$ (1-u_1x_1\ldots u_nx_n)^{-a}\; du_1\ldots du_n; $$

वशर्ते कि

$0 \leqq u_1,\ldots, 0 \leqq u_n, u_1+\ldots+u_k \leqq 1,$

$u_{k+1}+\ldots+u_n \leqq 1$ और $C, c', c-b_1\ldots-b_k$

तथा $c'-b_{k+1}\ldots-b_n$ के वास्तविक भाग धनात्मक हों।

उच्चतर घात के बहुगुण पराज्यामितीय फलन

गाउस पराज्यामितीय और संगामी पराज्यामितय फलनों के व्यापकीकरण को किसी भी घात तक बढ़ाया जा सकता है, यदि हम प्राचलों व चरों की

संख्या दोनों को बढ़ाते जाएं। इस कार्य हेतु श्रीवास्तव व डाउस्ट ने निम्नलिखित बहुगुण श्रेणी दी है।

$$\frac{\prod_{j=1}^{A}\Gamma[a_j+\sum_{i=1}^{n} m_i Q_j^{(i)}+\prod_{j=1}^{B^1}\Gamma[b_j^{(1)}+m_1 Q_j^{(1)}\ldots\prod_{j=1}^{B^n}\Gamma(b_j^{(n)}+m_n Q_j^{(n)})}{\prod_{j=1}^{C}\Gamma(c_j)\prod_{j=1}^{D^1}\Gamma[d_j^{(1)}\ldots\prod_{j=1}^{D^n}\Gamma(d_j^{(n)})}$$

$$\frac{x_1^{m_1}\ldots\ldots x_n^{m_n}}{m_1!\ldots\ldots m_n!}$$

इस अत्यधिक व्यापक बहुगुण पराज्यामितीय श्रेणी को निम्नलिखित दो में से किसी एक संकेताक्षर द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है।

$$S^{A:B';\ldots\ldots B^{(n)}}_{C:D';\ldots\ldots D^{(n)}}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=S^{A:B';\ldots\ldots B^{(n)}}_{C:D';\ldots\ldots D^{(n)}}$$

$$\left[\begin{matrix}[(a):\varphi',\ldots.\varphi^{(n)}]:[(b'):\phi'];\ldots.;[(b^{(n)}):\phi^{(n)}];\\ [(c);\psi',\ldots.\psi^{(n)}]:[(d'):\delta'];\ldots..;[(d)^{(n)};\delta^{(n)}].;^{x_1\ldots\ldots x_n}\end{matrix}\right]$$

अथवा

$$\frac{\prod_{j=1}^{A}\Gamma[a_j\prod_{j=1}^{B^1}\Gamma[b_j^{(1)}\ldots.\prod_{j=1}^{B^{(n)}}\Gamma(b_j^{(n)})}{\prod_{j=1}^{C}\Gamma(c_j)\prod_{j=1}^{D^1}\Gamma[d_j^{(1)}\ldots\prod_{j=1}^{D^n}\Gamma(d_j^{(n)})}$$

$$F^{A:B';\ldots\ldots B^{(n)}}_{C:D';\ldots\ldots D^{(n)}}\left[\begin{matrix}[(a):\varphi',\ldots..,\varphi^{(n)}]:[(b'):\phi'];\ldots,[(b)^{(n)}-\phi^{(n)}];\\ [(c):\psi',\ldots.,\psi^{(n)}]:[(d'):\delta'),\ldots,[(d)^{(n)}:\delta^{(n)}];x_1,\ldots.,x_n\end{matrix}\right]$$

जहां $\varphi'\ldots.$, $\phi'\ldots\ldots$, $\psi'\ldots\ldots$ और $\delta'\ldots..$ या तो धनात्मक स्थिरांक हैं या शून्य हैं।

यदि इन सब धनात्मक स्थिरांकों को इकाई के बराबर कर दिया जाए तो ये फलन लौरिसेला फलनों में परिवर्तित हो जाते हैं: उदाहरणार्थ फलन $F^{1:1;\ldots;1}_{0:1;\ldots;1}$ को लौरिसेला फलन $F_A^{(n)}$ लिखा जा सकता है।

बहुगुण पराज्यामितीय फलनों के व्यंजक बड़े होने के कारण ये देखने में जटिल से प्रतीत होते हैं लेकिन अनुप्रयोग के हिसाब से इनका क्षेत्र काफी विस्तृत है, इन फलनों की सांख्यिकी, भौतिक–विज्ञान, अभियांत्रिकी तथा प्रचालन शोध के क्षेत्रों में विस्तृत उपयोगिता देखने को मिलती है। गाउस पराज्यामितीय फलन एवं संगामी पराज्यामितीय फलन गणितीय भौतिकविज्ञान के आधार स्तंभ हैं क्योंकि इन्हीं फलनों के आधार पर अन्य फलनों की व्युत्पत्ति की जाती है। गाउस पराज्यामितीय फलन के आधारभूत अनुरूप निरूपण का संख्या सिद्धांत के क्षेत्र में काफी रोचक अनुप्रयोग देखने को मिलता है, इस प्रकार हम कह सकते हैं कि विशिष्ट फलनों में से पराज्यामितीय फलन अनुप्रयोग के हिसाब से सिद्धांत एवं अनुप्रयोग के बीच की खाई को कम करने में सबसे अधिक समर्थ है।

संदर्भ :

1. Higher Transcedental functions (1953 & 1954) Three volumes edited by Erdelyi, A. et al, McGraw-Hill Book Co. Inc.
2. Confluent hypergeometric functions (1960) by L.J. Slater, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
3. Generalized hypergeometric functions (1966) by L.J. Slater, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
4. Multiple hypergeometric functions (1976) by Hörold Exton, Ellis Horwood Limited, A division of John Wiley & sons Inc.
5. Yundell, L. Luke (1969). The special functions and their approximations, vol. I & II, Academic Press, New york.
6. Theory and applications of special functions (1975) Edited by Richard A. Askey, Academic Press, New york.
7. Special functions and their applications (1972) by N.N. Lebedev (Translated from Russian by Richard A. Silverman, Dover Pub. Inc.
8. On Differential Equations Associated with certain Hypergeometric functions of three variables, Ganita, Srivastava, H.M. and Saran S. (1965).
9. Generalized Hypergeometric Functions with applications in statistics and Physical Sciences, Springer Lecture Notes in Mathematics NO. 348 Mathai, A.M., Saxena, R.K. (1973).

हिंदी-अंग्रेजी शब्द-सूची

अनंत	infinity
अनुपात	ratio
अबीजीय	non-algebraic
अभिसरणता	convergence
अभिबिंदुगता	convergence towards a point
अवकलन	differentiation
अवकल समीकरण	differential equation
अशून्य स्थिरांक	non-zero constant
अवर्णित श्रेणी	undefined series
अपनेय विलक्षणता	removable singularity
आंशिक मानांकन	numerical evaluation
अवकल गुणधर्म	differential properties
अवकल गुणांक	differential coefficient
आयलर सर्वसमिका	Euler's identity
इर्दली	Erdelyi
ऋणात्मक मान	negative value
ऐपेल कूमर का प्रमेय	Appell kummer's Theorem
कैम्पे डी फैराइट	kampe de feriet
गुणांक	coefficient
गाउस का प्रमेय	Gauss's theorem
गूर्सा	Goursat
घातांकी समीकरण	indicial equation
घात श्रेणी	power series
चतुर्भुज फलन	quadruple function

चर	variable
चौंडी	Chaundy
चतुर्गुण फलन	quadruple function
जीटा फलन	zeta function
जैकोबी बहुफल	Jacobi polynomial
ज्यामितीय श्रेणी	geometrical series
टेलर	Taylor
डौगल	Dougall
तह	fold
त्रुटि फलन	error function
दीर्धवृत्तीय	elliptic
द्विपद प्रमेय	binomial theorem
धनात्मक	positive
निभृत करना	overwhelm
न्यूनीकरण सूत्र	reduction formula
पराज्यामितीय फलन	hypergeometric function
परिमेय फलन	rational function
पुनरावर्तक संबंध	recurrence relation
पुनरावृत्ति संबंध	recurrent relation
पुनरावृत्त संबंध	recurrence relation
पुनरावर्तक सूत्र	recurrence formula
पिकार्ड	Picard
पोकेमर	Pochammer
प्रतिस्थापित करना	substitute
फलन	function
बहुगुण पराज्यामितीय फलन	multiple hypergeometric function

बहुगुण समाकल सूत्र	multiple integral formula
बहुपद	polynomial
बहुपदी	relating to polymomial
बंद अंतराल	closed space
बार्न्े	Barnes
बीटा गामा फलन	Beta Gamma function
बेले का प्रमेय	Bailey's theorem
बेसल फलन	Bessel function
बीजगणितीय फलन	algebraic function
रीमान	Riemann
रोड्रिग	Rodrigue
लागेर बहुपदी	Laguerre polynomial
लेजान्ड्रे फलन	Legendre function
वास्तविक	real
विलक्षण बिंदु	singular point
वान्डरमौन्डे का प्रमेय	Vandermonde's theorem
विशिष्ट फलन	special function
वृत्तीय	circular
वैश्लेषिक सांतत्य	analytical continuity
व्यंजक	expression
व्युत्पत्ति	derivation
व्हिटेकर फलन	Whittaker function
संकलन प्रमेय	summation theorem
सरन	Saran
समाकल सूत्र	integral formula
समाकलन	integration
समीकरण	equation

सर्वसमिका	identity
संख्या	number
संगामी घात श्रेणी	confluent power series
संकलन व गुणन प्रमेय	addition and multiplication theorm
संसक्त फलन	contiguous function
सांतत्यता	continuity
स्टर्लिंग सूत्र	Stirling's formula
स्थिरांक	constant
स्लेटर	Slater
स्वेच्छाचारी मान	arbitrary value
स्वेच्छाचारी स्थिरांक	arbitrary constant
हॉर्न	Horn
हर्मिट बहुपद	Hermite polynomial
हंबर्ट फलन	Humbert's function
हिल्बर्ट	Hilbert
हैराल्ड एक्सटन	Harold exton

MGIPRRND—3123 HRD/2001—600 Copies.